

KOMMUTATIVE DISTRIBUTIVE
QUASIGRUPPEN

von
Viktor Vogt
aus
Ansbach

1980

1980 #228

KOMMUTATIVE DISTRIBUTIVE

QUASIGRUPPEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

KOMMUTATIVE DISTRIBUTIVE QUASIGRUPPEN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Viktor Vogt

aus

Ansbach

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 8. Februar 1980

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter: Professor Dr. P. Plaumann

INHALTSVERZEICHNIS

0. <u>Einleitung</u>	1
1. <u>Grundlagen und Hilfsergebnisse</u>	5
1.1 Distributive Quasigruppen	5
1.2 Kommutative Moufang-Loops	8
2. <u>Beziehungen zwischen kommutativen distributiven Quasigruppen und kommutativen Moufang-Loops</u>	11
2.1 Unterquasigruppen - Unterloops	11
2.2 Total-symmetrische Unterquasigruppen kommutativer distributiver Quasigruppen	13
2.3 Eine funktorielle Beschreibung des Zusammenhangs: Kommutative distributive Quasigruppen-Kommutative Moufang-Loops	18
2.4 Kommutative distributive Quasigruppen mit auflösbarer Automorphismengruppe $R(D)$	21
3. <u>Kommutative distributive Quasigruppen mit $R(D)'$ nilpotent von der Klasse $k \leq 3$</u>	30
3.1 Das Konstruktionsverfahren nach K.STRAMBACH	31
3.2 Ein Konstruktionsverfahren nach R.H.BRUCK	33
3.3 Kennzeichnung kommutativer distributiver Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$	37
3.4 Minimale und einfache kommutative distributive Quasigruppen	42
4. <u>Bemerkungen zu endlich erzeugten kommutativen distributiven Quasigruppen</u>	45
<u>Literatur</u>	54

0. Einleitung

Der von BURSTIN/MAYER 1927 eingeführte Begriff der distributiven Quasigruppe verallgemeinert in natürlicher Weise die Mittelbildung. Die Methoden der Untersuchung distributiver Quasigruppen haben sich in zweierlei Richtung entwickelt. Einmal hat die russische Schule um BELOUSOV einen wichtigen Zusammenhang zwischen distributiven Quasigruppen und kommutativen Moufang-Loops hergestellt, einem in der nicht-assoziativen Algebra am weitesten entwickelten Gebiet: jeder distributiven Quasigruppe kann man in natürlicher Weise eine kommutative Moufang-Loop zuordnen. Zum anderen hat B. FISCHER erkannt, daß die Theorie der distributiven Quasigruppen als eine Theorie von Klassen konjugierter Elemente in einer Gruppe aufgefaßt werden kann, wobei die Struktur dieser Gruppen im endlichen Fall gut bekannt ist: wegen des Rechts-Distributivgesetzes sind die Rechts-translationen Automorphismen der distributiven Quasigruppe und man kann die Quasigruppe in die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe einbetten. Eine Brücke zwischen den beiden Betrachtungsweisen schlug J.D.H. SMITH, indem er gezeigt hat, daß die Kommutatorgruppe der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe mit der Multiplikationsgruppe der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop übereinstimmt.

Ogleich die Theorie der distributiven Quasigruppen weit verästelt ist, hat man bisher die Klasse der kommutativen distributiven Quasigruppen von einer methodischen Untersuchung ausgenommen. Die einzige Publikation scheint die Arbeit von K. STRAMBACH zu sein, in der zum ersten Mal auf elementare Weise, d.h. ohne die Benutzung der beschriebenen Methoden versucht wird, die Klasse der kommutativen distributiven Quasigruppen mit Hilfe der Gruppentheorie zu beschreiben.

In dieser Arbeit sollte ein systematischer Versuch einer Klassifikation kommutativer distributiver Quasigruppen

unternommen werden. Daß wir zu befriedigenden Ergebnissen kommen konnten, liegt methodisch daran, daß es gelungen ist, die BELOUSOVsche Korrespondenz zwischen einer distributiven Quasigruppe und einer kommutativen Moufang-Loop weitgehend auf Unterquasigruppen und Unterloops zu übertragen und die SMITHsche Korrespondenz auf diese Unterobjekte zu erweitern.

Nachdem wir im Paragraphen 1 einige Grundlagen über distributive Quasigruppen und kommutative Moufang-Loops bereitgestellt haben, werden im Paragraphen 2 konkret die Beziehungen zwischen kommutativen distributiven Quasigruppen bzw. ihren Unterquasigruppen und den zugehörigen kommutativen Moufang-Loops bzw. Unterloops diskutiert. Für die Charakterisierung der kommutativen distributiven Quasigruppen erwiesen sich außerdem die sogenannten total-symmetrischen distributiven Quasigruppen von grundlegender Bedeutung, das sind solche distributiven Quasigruppen, deren Rechtstranslationen involutorisch sind. Als ein Nebenprodukt unserer Betrachtungen ergab sich, daß der maximalen Unterloop vom Exponenten 3 in der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop eine normale total-symmetrische Unterquasigruppe der kommutativen distributiven Quasigruppe entspricht, wobei die Faktorquasigruppe eine metabelsche von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe besitzt; darüber hinaus erweist sich jede total-symmetrische distributive Quasigruppe als lokal-endlich. Mit diesen Hilfsmitteln können wir nachweisen, daß die Kategorie kommutativer distributiver Quasigruppen äquivalent zur Kategorie derjenigen kommutativen Moufang-Loops ist, in denen $x \rightarrow x^2$ ein Automorphismus ist; im endlichen Fall entsprechen kommutativen distributiven Quasigruppen kommutative Moufang-Loops ungerader Ordnung. Es stellt sich weiterhin heraus, daß man die kommutativen distributiven Quasigruppen in drei disjunkte Klassen einteilen kann.

Die Klasse, die sich einer weiteren Betrachtung am zugänglichsten erweist, umfaßt diejenigen kommutativen distributiven Quasigruppen, deren von den Rechtstranslationen

erzeugte Automorphismengruppe metabelsch ist. Für die Klasse der total-symmetrischen distributiven Quasigruppen, deren von den Rechtstranslationen erzeugte Gruppe perfekt ist, hat man bislang nur eine Klasse von Beispielen; insbesondere treten in ihr keine endlich-erzeugten distributiven Quasigruppen auf. Die restlichen kommutativen distributiven Quasigruppen liegen in einer Klasse, deren Elemente D einen echten total-symmetrischen Normalteiler N besitzen, so daß die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von D/N metabelsch ist.

Die kommutativen distributiven Quasigruppen der ersten Klasse, die eine metabelsche von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe zulassen, kann man algebraisch durch das verallgemeinerte Assoziativgesetz

$$(*) \quad (w \circ x) \circ (y \circ z) = (w \circ y) \circ (x \circ z)$$

und gruppentheoretisch dadurch charakterisieren, daß je drei Rechtstranslationen eine metabelsche Gruppe erzeugen. Man sieht leicht, daß die Bedingung $(*)$ der von STRAMBACH betrachteten Bedingung äquivalent ist, die zur Erzeugung von kommutativen distributiven Quasigruppen aus eindeutig 2-teilbaren Abelschen Gruppen benutzt wurde. Die dort geäußerte Vermutung über die Entbehrlichkeit dieser Bedingung erweist sich als unzutreffend, was sich durch Gegenbeispiele belegen läßt. Weiterhin zeigt sich, daß insbesondere die minimalen und halbeinfachen kommutativen distributiven Quasigruppen zur ersten Klasse gehören.

Aus der dritten Klasse konnten wir diejenigen kommutativen distributiven Quasigruppen vollständig klassifizieren, deren von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe eine Kommutatorgruppe von der Nilpotenzklasse $k \leq 3$ besitzt. Sie lassen sich alle nach einem Verfahren von BRUCK explizit angeben.

Ein Hauptergebnis der Arbeit deckt einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Auflösbarkeit der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe A einer kommutativen distributiven Quasigruppe und der zugehörigen kommutativen

Moufang-Loop M auf. Es gilt: Ist die Gruppe A auflösbar, so ist die Loop M auflösbar. Ob aus der Auflösbarkeit von M die Auflösbarkeit von A folgt, ist nur für endliche kommutative distributive Quasigruppen bekannt, allgemein scheint dies ein schwieriges Problem zu sein.

Im letzten Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Nilpotenzklasse der Kommutatorgruppe A der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe einer endlich erzeugten kommutativen distributiven Quasigruppe. A stimmt mit der Multiplikationsgruppe der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop überein. Erzeugen je drei Multiplikationen von A eine Gruppe der Nilpotenzklasse $k \leq 3$, so wird die zentrale Nilpotenzklasse der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop durch eine Funktion der Erzeugenden beschränkt.

Ich danke Herrn Professor Dr. K. Strambach für die Anregung zu dieser Arbeit und die Geduld, mit der er ihre Fertigstellung unterstützte und förderte.

1. Grundlagen und Hilfsergebnisse

1.1 Distributive Quasigruppen

Eine Quasigruppe $(D, \circ)$ ist eine Menge D mit einer binären Operation " $\circ$ " und der Eigenschaft:

- (1) Die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ sind für alle $a, b \in D$ eindeutig lösbar.

Definition 1: Eine Quasigruppe $(D, \circ)$ heißt distributive Quasigruppe, wenn für beliebige $a, b, c \in D$ gilt:

$$(2) \quad \begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= (a \circ b) \circ (a \circ c) & \text{und} \\ (a \circ b) \circ c &= (a \circ c) \circ (b \circ c) \end{aligned}$$

Eine distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ heißt kommutativ, wenn $a \circ b = b \circ a$ für beliebige $a, b \in D$.

Es sei nun $(D, \circ)$ eine distributive Quasigruppe; für $a \in D$ sei R_a die folgende Abbildung von D auf D :

$$(3) \quad R_a: x \longrightarrow x \circ a, x \in D.$$

Die Rechtstranslation R_a ist wegen Definition 1 ein Automorphismus von $(D, \circ)$. Die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe werde mit $R(D)$ bezeichnet. Sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind, sprechen wir häufig nur von der Automorphismengruppe $R(D)$. Die Abbildung $x \longrightarrow R_x$ von D nach $R(D)$ ist eine Injektion. Nun bezeichne D^D die Menge der nach (3) festgelegten Rechtstranslationen. Der folgende Hilfssatz zeigt einige elementare Eigenschaften der Automorphismengruppe $R(D)$ einer distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ auf.

Hilfssatz 1: Es sei $(D, \circ)$ eine distributive Quasigruppe. Dann besitzt die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ die folgenden Eigenschaften:

i) Für $a, b \in D$ gilt:

$$R(a \circ b) = R_b^{-1} R_a R_b .$$

ii) D^D ist eine Klasse konjugierter Elemente in $R(D)$.

iii) Das Zentrum von $R(D)$ ist trivial.

iv) Es bezeichne $\mathcal{C}_{R(D)}(R_a)$, $a \in D$, den Zentralisator der Rechtstranslation R_a in $R(D)$ und $R(D)_a$ die Standgruppe des Elementes $a \in D$. Dann gilt:

$$\mathcal{C}_{R(D)}(R_a) = R(D)_a .$$

Beweis:

Für i), ii) und iii) vgl. FISCHER, Satz 2.1 .

iv): Mit (1) und (2) ist die Operation $\circ$ idempotent, also $x \circ x = x$ für jedes $x \in D$. Es gilt daher $R(D)_a \cap D^D = \{R_a\}$. Ist α aus $R(D)_a$, so folgt nun mit ii) sofort $\alpha^{-1} R_a \alpha = R_a$. Für jedes $\beta \in \mathcal{C}_{R(D)}(R_a)$ gilt:

$$(*) \quad a R_a \beta = (a \circ a) \beta = a \beta = a \beta R_a = a \beta \circ a .$$

Man liest aus (*) die Beziehung: $a \beta = a, a \beta$. Damit ist iv) gezeigt.

Bemerkung: Ist $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, so folgt mit Hilfssatz 1, i) für alle $a, b \in D$ die Beziehung:

$$(4) \quad R_a^{-1} R_b R_a = R_b^{-1} R_a R_b .$$

Für unsere späteren Überlegungen ist die Kommutatorgruppe $R(D)'$ der Automorphismengruppe $R(D)$ von Bedeutung. Die Gruppe $R(D)'$ wird von der Menge $K := \{R_x R_y^{-1} : x, y \in D\}$ erzeugt, insbesondere ist die Faktorgruppe $R(D)/R(D)'$ zyklisch (FISCHER, Hilfssatz 2.1). Daher läßt sich $R(D)$ als semidirektes Produkt $R(D) \ltimes \langle R_a \rangle$ der Kommutatorgruppe $R(D)'$ mit der zyklischen Gruppe $\langle R_a \rangle$, $R_a \in D^D$, auffassen (vgl. STRAMBACH S.76).

Für eine Teilmenge U von D bezeichne $(U, \circ)$ in der üblichen

Weise eine distributive Unterquasigruppe der distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$.

Lemma 1: Es sei $(U, \circ)$ eine distributive Unterquasigruppe der distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$. Weiterhin sei $U^D := \{R_U: u \in U\}$ und $\langle U^D \rangle$ die von U^D erzeugte Untergruppe von $R(D)$. Dann gilt:

- i) $\langle U^D \rangle \cap D^D = U^D$,
- ii) $R(U) \cong \langle U^D \rangle / Z(\langle U^D \rangle)$.

Beweis: FISCHER, Lemma 2.1.

Die Aussage ii) von Lemma 1 weist auf eine Schwierigkeit hin, mit der wir in den folgenden Paragraphen noch zu tun haben werden. Ist das Zentrum der Gruppe $\langle U^D \rangle$ nicht trivial, so gibt es wegen Hilfssatz 1, iv) nicht-triviale Elemente in $\langle U^D \rangle$, welche die distributive Unterquasigruppe $(U, \circ)$ elementweise festlassen. Offenbar liegt kein (nicht-triviales) Element $R_U R_V^{-1}$ der Kommutatorgruppe $\langle U^D \rangle$ von $\langle U^D \rangle$ im Zentrum von $\langle U^D \rangle$; denn aus $R_U R_V^{-1} \in Z(\langle U^D \rangle) =: Z$, folgte $R_V^{-1} R_U \in Z$ und somit $R_U = R_V^{-1} R_U R_V$. Mit Hilfssatz 1, i) ergäbe sich daher $u = v$ und $R_U R_V^{-1}$ ist trivial. Jedoch wird i.a. der Durchschnitt $\langle U^D \rangle \cap Z(\langle U^D \rangle)$ nicht leer sein.

Ist $(U, \circ)$ eine distributive Unterquasigruppe der distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$, so ist für $x \in D$ die Menge $U \circ x := \{u \circ x: u \in U\}$ eine distributive Quasigruppe bezüglich der Operation " $\circ$ ". Jedoch ist der Durchschnitt von $U \circ x$ mit $U \circ y$, $x, y \in D$, i.a. nicht leer. Für endliche distributive Quasigruppen nennt FISCHER die distributive Unterquasigruppe $(U, \circ)$ einen Normalteiler der distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$, wenn für alle $\alpha \in R(D)$ gilt: $U\alpha \cap U = \emptyset$ oder $U = U\alpha$. Wir schließen uns BELOUSOV an und verwenden eine allgemeinere Begriffsbildung von KIOKEMEISTER (siehe BRUCK [3]).

Es sei $G := (G, \cdot)$ eine Quasigruppe. Eine Äquivalenzrelation α auf G heiße normal, genau dann wenn für alle $a, b, c, d \in G$ gilt:

- i) $ca\alpha cb \implies a\alpha b$,
- ii) $ac\alpha bc \implies a\alpha b$,
- iii) $a\alpha b$ und $c\alpha d \implies ac\alpha bd$.

Die Äquivalenzklassen $K(a, \alpha)$, $a \in G$, bilden eine Quasigruppe G/α wobei gilt: $K(a, \alpha)K(b, \alpha) = K(ab, \alpha)$, $a, b \in G$. Jeder Homomorphismus φ einer Quasigruppe G auf eine Quasigruppe $G\varphi$ bestimmt eindeutig eine normale Äquivalenzrelation α auf G und die Abbildung $K(a, \alpha) \longrightarrow a\varphi$, $a \in G$, ist ein Isomorphismus von G/α auf $G\varphi$.

Definition 2: Es sei $(D, \circ)$ eine distributive Quasigruppe. Eine distributive Unterquasigruppe $(U, \circ)$ heiße Normalteiler in $(D, \circ)$, wenn es eine (eindeutig bestimmte) normale Relation α auf $(D, \circ)$ gibt, so daß gilt: $U = K(a, \alpha)$ für gewisse $a \in D$.

Ist nun $(U, \circ)$ ein Normalteiler in $(D, \circ)$, so gilt (BELOUSOV, S. 279) für alle $x, y \in D$:

$$(5) \quad (U \circ x) \circ (U \circ y) = U \circ (x \circ y).$$

Es lassen sich daher diejenigen Implikationen aus (5), die FISCHER ohne Abzhlbarkeitsargumente gewonnen hat, auch für nicht-endliche distributive Quasigruppen übernehmen. Es bezeichne im folgenden in üblicher Weise $(D, \circ)/(U, \circ)$ die Faktorquasigruppe einer distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ nach ihrem Normalteiler $(U, \circ)$. Offenbar werden die Elemente von $(D, \circ)/(U, \circ)$ gerade durch die distributiven Quasigruppen $U \circ x$, $x \in D$, repräsentiert.

Abschließend machen wir noch eine Bemerkung zu endlichen kommutativen distributiven Quasigruppen.

Lemma 2: Es sei $(D, \circ)$ eine endliche kommutative distributive Quasigruppe. Ist n die Ordnung von $(D, \circ)$, so ist n von der Form $2N+1$, N eine natürliche Zahl. Insbesondere gibt es zu jeder ungeraden positiven ganzen Zahl n eine kommutative distributive Quasigruppe der Ordnung n .

Beweis: BURSTIN/MAYER, S. 113 ff. .

1.2 Kommutative Moufang-Loops

Eine Quasigruppe $(D, \cdot)$ mit einem ausgezeichneten Element

$e \in D$ so daß für alle $x \in D$ gilt:

$$(6) \quad x.e = e.x = x,$$

heißt eine Loop.

Definition 3: Eine Loop $(D, ., e)$ mit Einselement e heißt eine Moufang-Loop, wenn für alle $x, y, z \in D$ gilt:

$$(7) \quad (x.y).(z.x) = (x.(y.z)).x \quad (\text{Moufang-Identität}).$$

Wir schreiben künftig für $x.y$ kurz xy . Im folgenden werden ausschließlich kommutative Moufang-Loops betrachtet, also Loops $(D, ., e)$, die mit (7) auch $xy = yx, x, y \in D$, erfüllen. Wir listen nun einige elementare Eigenschaften von kommutativen Moufang-Loops auf, die in den folgenden Überlegungen benötigt werden.

Für Loops sind einige spezielle Unterloops von Bedeutung, die sich im Falle kommutativer Moufang-Loops in einfacher Weise kennzeichnen lassen (vgl. BRUCK, [2] und [3]).

Es sei nun $(D, ., e)$ eine kommutative Moufang-Loop. Für $a, b, c \in D$ bezeichne (a, b, c) die Lösung der Gleichung

$$(8) \quad (ax)(bc) = (ab)c.$$

Definition 4: Es sei $(D, ., e)$ eine kommutative Moufang-Loop.

Die gemäß (8) festgelegten Elemente $(a, b, c) \in D$ heißen

Assoziatoren und die von allen Assoziatoren aus D erzeugte Unterloop $(D', ., e)$ heißt die Assoziator-Unterloop (abgeleitete Unterloop) von $(D, ., e)$.

Eine Unterloop $(U, ., e)$ einer kommutativen Moufang-Loop $(D, ., e)$ heißt Normalteiler in $(D, ., e)$, wenn $(U, ., e)$ Kern eines Homomorphismus von $(D, ., e)$ ist.

Hilfssatz 2: Es sei $(D, ., e)$ eine kommutative Moufang-Loop. Dann gilt:

- i) Die Abbildung $x \rightarrow x^3, x \in D$, ist ein zentralisierender Endomorphismus von $(D, ., e)$.
- ii) Es sei $(D', ., e)$ die abgeleitete Unterloop in $(D, ., e)$, dann gilt:

- a) für alle $x \in D'$ ist $x^3 = e$;
 b) $(D', \cdot, e)$ ist eine charakteristische Unterloop von $(D, \cdot, e)$.

Beweis: BRUCK [3], Kap. VIII, §4 und Lemma 5.7 .

I.a. sind charakteristische Unterloops einer Loop keine Normalteiler (vgl. BRUCK [2]), jedoch im Falle kommutativer Moufang-Loops ist jede charakteristische Unterloop auch Normalteiler.

Definition 5: Für eine kommutative Moufang-Loop $D:=(D, \cdot, e)$ bezeichne $Z(D)$ die Menge $\{z \in D: \forall x, y \in D \text{ gilt } x(yz)=(xy)z\}$. $Z(D)$ heißt das Zentrum von D und ist ein (charakteristischer) Normalteiler in D (BRUCK [2]).

Offenbar ist das Zentrum einer kommutativen Moufang-Loop eine Abelsche Gruppe.

Wir betrachten nun die Teilmenge (8) $N := \{x: x \in D \text{ und } x^3 = e\}$ der Menge D einer kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$.

Hilfssatz 3: Es sei $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop, $N \subseteq D$ und durch (8) definiert. Dann ist $(N, \cdot, e)$ eine charakteristische, normale Unterloop von $(D, \cdot, e)$. Insbesondere ist $(D, \cdot, e)/(N, \cdot, e) \subseteq Z(D)$.

Beweis: BRUCK, Kap. II, Theorem 7C in [2] .

Ist $(D, \cdot, e)$ eine Loop, so heißt die Abbildung $x \longrightarrow xa(ax)$, $x \in D$, eine Rechtsmultiplikation (Linksmultiplikation) mit $a \in D$. Für eine kommutative Moufang-Loop stimmen Rechts- und Linksmultiplikation überein, wir sprechen daher von der Multiplikation m_a mit $a \in D$. Es bezeichne $M(D)$ die von den Multiplikationen einer kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ erzeugte Gruppe. $M(D)$ ist eine Gruppe von Permutationen auf der Menge D und heiße Multiplikationsgruppe der Loop $(D, \cdot, e)$ (ALBERT).

Eine Teilmenge $U \subseteq D$ ist eine Unterloop der kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$, wenn gilt: $eM(U) = U$; wobei

$$(9) \quad M(U) := \langle \{m_x: x \in U\} \rangle \subseteq M(D) \quad (\text{ALBERT, Lemma 4}).$$

$M(U)$ stimmt i.a. mit der Multiplikationsgruppe der Unterloop $(U, \cdot, e)$ nicht überein; es kann nicht-triviale Elemente in $M(U)$ geben, die die Menge U elementeweise festlassen. Ist $(U, \cdot, e)$ ein Normalteiler der kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$, so ist $M(U)$ i.a. nicht normal in $M(D)$.

Definition 6: Es sei $D := (D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop mit Multiplikationsgruppe $M(D)$. Des weiteren sei $U := (U, \cdot, e)$ ein Normalteiler in D und $M(U)$ gemäß (9) definiert. Dann heißt die Gruppe $M(U)^*$, definiert durch

$$(10) \quad M(U)^* := \{ \alpha : \alpha \in M(D) \text{ und } \forall x (U(x\alpha) = Ux) \},$$

der zu U gehörige Normalteiler in $M(D)$ (ALBERT).

Daß $M(U)^*$ ein Normalteiler in $M(D)$ ist, ist trivial. Da $U \triangleleft D$, folgt offenbar $M(U) \leq M(U)^*$.

Hilfssatz 4: Es sei $U := (U, \cdot, e)$ ein Normalteiler der kommutativen Moufang-Loop $D := (D, \cdot, e)$. $M(D)$ sei die Multiplikationsgruppe von D und $M(U)^*$ gemäß (10) definiert. Dann gilt:

$$M(D/U) \cong M(D)/M(U)^*.$$

Beweis: ALBERT, Theorem 5.

2. Beziehungen zwischen kommutativen distributiven Quasigruppen und kommutativen Moufang-Loops

2.1 Unterquasigruppen-Unterloops

Es sei $(D, \circ)$ eine distributive Quasigruppe, $e \in D$ fest gewählt. Weiterhin bezeichne $R := R_e$ und $L := L_e$ die Rechts- bzw. Links-translation mit e .

Hilfssatz 5: Es sei " $\cdot$ " ,definiert durch

$$(11) \quad x \cdot y := x R^{-1} \circ y L^{-1}, \quad x, y \in D,$$

eine binäre Operation auf D . Dann ist $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop.

Beweis: BELOUSOV, Theorem 1.

Es sei $R(D)$ die von den Rechtstranslationen von $(D, \circ)$ erzeugte Automorphismengruppe. Da $R, R^{-1}, L, L^{-1} \in R(D)$, folgt mit (11) sofort, daß die Abbildungen R, R^{-1}, L, L^{-1} Automorphismen von $(D, \cdot, e)$ sind.

Hilfssatz 6: Für $e, k \in D$ seien die kommutativen Moufang-Loops $(D, \cdot, e)$ und $(D, \cdot, k)$ gemäß (11) definiert. Dann gilt:

$$(D, \cdot, e) \cong (D, \cdot, k).$$

Beweis: BELOUSOV, Theorem 3.

Es sei nun im folgenden $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe. Dann stimmen die Rechtstranslationen mit den Linkstranslationen überein. Somit ergibt sich aus (11) die Beziehung

$$(12) \quad x \cdot y = xR^{-1} \circ yR^{-1} = (x \circ y)R^{-1} \quad \text{oder}$$

$$(13) \quad (x \cdot y)R = x \circ y, \quad x, y \in D.$$

Wir schreiben für $x \cdot y$ kurz xy . Durch (12) läßt sich jeder kommutativen distributiven Quasigruppe eine kommutative Moufang-Loop zuordnen, wir sprechen daher von der einer kommutativen distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ zugehörigen kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$.

Lemma 3: Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe mit zugehöriger kommutativer Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$. Dann ist die Abbildung: $x \mapsto x^2, x \in D$, ein Automorphismus von $(D, \cdot, e)$.

Beweis: Wir setzen $R_e = R$. Zunächst gilt für alle $x \in D$ wegen (13):

$$xx = x^2 = (x \circ x)R^{-1} = xR^{-1}.$$

Da $R^{-1} \in R(D)$, folgt mit (12) für alle $x, y \in D$:

$$(xy)^2 = (xy)R^{-1} = (x \circ y)R^{-2} = (xR^{-1} \circ yR^{-1})R^{-1} = x^2 y^2.$$

Da R ein Automorphismus von $(D, \cdot, e)$ ist, ist alles gezeigt.

Wir betrachten die Multiplikationen $m_x, x \in D$, von $(D, \cdot, e)$.

Für jedes $z \in D$ und $x \in D$ festgewählt gilt:

$$(14) \quad z m_x = z x = (z \circ x) R^{-1} = z R_x R^{-1}, \text{ wobei } R^{-1} := R_e^{-1}.$$

Aus (14) folgt für jedes $x \in D$:

$$(15) \quad m_x = R_x R^{-1}.$$

J. SMITH hat gezeigt, daß die Kommutatorgruppe $R(D)'$ der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe einer distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ mit der Multiplikationsgruppe der zugehörigen Moufang-Loop $(D, ., e)$ übereinstimmt. Wir verfeinern dieses Ergebnis für kommutative distributive Quasigruppen.

Lemma 4: Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe und $(D, ., e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Weiterhin sei $(U, \circ)$ eine kommutative distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ mit $e \in U$. Dann gilt:

i) $(U, ., e)$ ist eine Unterloop von $(D, ., e)$ und $M(U) = \langle U^D \rangle'$, wobei $M(U) := \langle \{m_x : x \in U\} \rangle \leq M(D)$ und $\langle U^D \rangle'$ die Kommutatorgruppe der von U^D erzeugten Gruppe $\langle U^D \rangle$. Insbesondere gilt: $M(D) = R(D)'$.

ii) Es bezeichne $\text{Mult}(U)$ die Multiplikationsgruppe der Loop $(U, ., e)$ aus i). Dann gilt:

$$\text{Mult}(U) \cong \langle U^D \rangle' / N,$$

wobei $N := \langle U^D \rangle' \cap Z(\langle U^D \rangle)$.

Beweis:

i): Da $e \in U$, ist mit RELOUSOV (§2. No 3.) die Loop $(U, ., e)$ eine Unterloop von $(D, ., e)$. Insbesondere ist $(U, ., e)$ invariant unter den Automorphismen $R, R^{-1}; R := R_e$.

Zunächst gilt: $M(U) \leq \langle U^D \rangle'$.

Wegen Lemma 1, i) ist U^D eine Klasse konjugierter Elemente in $\langle U^D \rangle$ und mit FISCHER, Hilfssatz 2.1 wird $\langle U^D \rangle'$ von der Menge $K := \{R_x R_y^{-1} : x, y \in U\}$ erzeugt. Da $e \in U$, folgt mit (15) sofort $M(U) \leq \langle U^D \rangle'$.

Ist $\alpha \in \langle U^D \rangle'$, so läßt sich wegen vorstehendem Argument der Automorphismus α als endliches Produkt von Elementen aus K darstellen. Nun gilt aber für alle $x, y \in U$ die Beziehung:

$$(16) \quad R_x R_y^{-1} = R_x R^{-1} R R_y^{-1} = m_x m_y^{-1} \in M(U),$$

womit i) gezeigt ist.

ii): Wegen Lemma 1, ii) gilt für die von den Rechtstranslationen mit Elementen aus U erzeugte Gruppe $R(U)$:

$$R(U) \cong \langle U^D \rangle / Z(\langle U^D \rangle).$$

Für $N := \langle U^D \rangle' \cap Z(\langle U^D \rangle)$ betrachten wir die Faktorgruppe $\langle U^D \rangle' / N$. Wie im Abschnitt 1.1 gezeigt, liegt kein Element von K in N und $\langle U^D \rangle' / N =: G$ wird wegen i) von den Elementen $\overline{R_x R^{-1}} := R_x R^{-1} N$, $x \in U$, aus G erzeugt. Jedes Element $\alpha \in N$ läßt wegen Hilfssatz 1 die Unterloop $(U, \cdot, e)$ elementweise fest. Die Multiplikationsgruppe $\text{Mult}(U)$ wird von den Multiplikationen $m(x)$, $x \in U$, von $(U, \cdot, e)$ erzeugt. Für jedes $x \in U$ transformieren die Permutationen $\overline{R_x R^{-1}} \in G$ und $m(x) \in \text{Mult}(U)$ die Elemente von $(U, \cdot, e)$ auf dieselbe Weise. Demgemäß transformieren auch entsprechende Produkte von erzeugenden Elementen aus G bzw. $\text{Mult}(U)$ die Elemente von $(U, \cdot, e)$ auf dieselbe Weise. Die Abbildung $\overline{R_x R^{-1}} \mapsto m(x)$, $x \in U$, bildet das Erzeugendensystem von G eineindeutig auf das Erzeugendensystem von $\text{Mult}(U)$ ab, womit die Isomorphie der Gruppen G und $\text{Mult}(U)$ folgt.

2.2 TS-Unterquasigruppen von kommutativen distributiven Quasigruppen.

BELOUSOV hat darauf hingewiesen, daß total-symmetrische distributive Unterquasigruppen distributiver Quasigruppen zur Kennzeichnung der Eigenschaften dieser Quasigruppen von Bedeutung sind.

Definition 7: Eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ heiße total-symmetrisch (TS-Quasigruppe), wenn für alle $x, y \in D$ gilt:

$$(17) \quad (x \circ y) \circ y = x.$$

Offenbar gilt mit (17) für alle $x \in D$ die Beziehung: $R_x^2 = 1$, 1 das Einselement in $R(D)$, und $R(D)$ wird von einer Klasse konjugierter Involutionen D^D erzeugt.

Zur Charakterisierung der distributiven TS-Unterquasigruppen einer kommutativen distributiven Quasigruppe benötigen wir das folgende einfache Ergebnis.

Lemma 5: Es sei $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop, $M(D)$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Dann gilt für alle $x, y \in D$:

- i) $m_{xy} = m_x^{-1} m_y m_x^2 = m_y^{-1} m_x m_y^2$;
- ii) $(m_x)^n = m_{(x^n)}$, n eine positive ganze Zahl.

Beweis:

Da $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop ist, läßt sich die Moufang-Identität ((7)) wie folgt schreiben:

$$(18) \quad (zx)(xy) = ((zy)x)x, x, y, z \in D.$$

Hieraus folgt

$$(19) \quad z m_x m_{xy} = z m_y m_x^2 \text{ für jedes } z \in D \text{ und } x, y$$

beliebig in D gewählt. Aus (19) folgt i). Setzt man in (19) $y = x$, so folgt ii).

Ersetzt man in i) das Element y durch x^{-1} , so erhält man die Beziehung: $(m_x)^{-1} = m_{(x^{-1})}$, für jedes $x \in D$.

Satz 1:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Weiterhin sei $U := \{x: x \in D \text{ und } R_x^2 = R_e^2 =: R^2\}$. Dann gilt:

- i) $(U, \cdot, e)$ ist eine charakteristische, normale Unterloop vom Exponenten 3 in $(D, \cdot, e)$. Insbesondere enthält $(U, \cdot, e)$ alle Elemente der Ordnung 3 in $(D, \cdot, e)$.
- ii) Ist $(D', \cdot, e)$ die abgeleitete Unterloop von $(D, \cdot, e)$, so gilt: $(D', \cdot, e) = (U, \cdot, e)$.
- iii) $(U, \circ)$ ist ein total-symmetrischer Normalteiler in $(D, \circ)$ und $R((D, \circ)/(U, \circ))$, die von den Rechtstranslationen

erzeugte Automorphismengruppe der Faktorquasigruppe $(D, \circ)/(U, \circ)$, ist metabelsch.

iv) $(U, \circ)$ ist lokal-endlich.

Beweis:

i): Es sei m_x eine Multiplikation aus $M(D)$. Dann gilt mit (15) die Beziehung:

$$(20) \quad (m_x)^3 = (R_x R^{-1})^3, \quad x \in D.$$

Mit (4) erhält man

$$(21) \quad (R_x R^{-1})^3 = R_x R^{-1} R_x R^{-1} R_x R^{-1} = R_x (R^{-1} R_x R) R^{-2} R_x R^{-1} = \\ = R R_x R^{-2} R_x R^{-1}.$$

Ist $(m_x)^3 = 1$, das Einselement in $M(D)$, so folgt mit (21) die Beziehung

$$(22) \quad R_x^{-2} = R^{-2} \quad \text{oder} \quad R_x^2 = R^2.$$

Wir erhalten als Ergebnis:

Für alle $x \in U$ gilt: $(m_x)^3 = 1$, also insbesondere $x^3 = e$ (Lemma 5).

Es sei nun $z \in D$ mit $z^3 = e$. Wegen Lemma 5, ii) folgt $m_z^3 = 1$ und wegen (20) - (22) folgt $R_z^2 = R^2$ und somit $z \in U$. Mit Hilfssatz 3 ist i) vollständig gezeigt.

ii): Das folgt sofort aus Hilfssatz 2.

iii): Wegen i) ist die Loop $(U, \cdot, e)$ invariant unter den Automorphismen R, R^{-1} und Normalteiler in $(D, \cdot, e)$. Nach BELOUSOV (§2, No 7) ist $(U, \circ)$ ein Normalteiler in $(D, \circ)$. Daß $(U, \circ)$ eine distributive TS-Quasigruppe ist, folgt aus der Definition der Menge U und aus Definition 5. Wegen Hilfssatz 3 ist die Faktorloop $(D, \cdot, e)/(U, \cdot, e)$ eine Abelsche Gruppe. Nach BELOUSOV (Theorem 4) ist $(D, \circ)/(U, \circ)$ isotop zu $(D, \cdot, e)/(U, \cdot, e)$ gemäß der Vorschrift (11) von Hilfssatz 5, sofern in (11) die Elemente aus $(D, \circ)$ durch die Nebenklassen bezüglich $(U, \circ)$ und das fest gewählte Element e durch den Normalteiler $(U, \circ)$ ersetzt wird.

Es bezeichne nun G die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $A := (D, \circ)/(U, \circ)$ und M die Multiplikationsgruppe von $B := (D, \cdot, e)/(U, \cdot, e)$. Da B eine Abelsche

Gruppe ist, ist auch M Abelsch. Wegen Lemma 4, i) folgt $G' = M$, also G metabelsch und ii) ist gezeigt.

iv): Zum Beweis von iv) zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 6: Es sei $(D, \circ)$ eine distributive TS-Quasigruppe. Dann ist $(D, \circ)$ lokal-endlich.

Beweis:

Ist $(D, \circ)$ eine distributive TS-Quasigruppe, so lehrt der Beweis von i), daß für jedes $e \in D$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ den Exponenten 3 besitzt. Nun hat BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 11.3) folgendes gezeigt: Hat jedes Element einer kommutativen Moufang-Loop G endliche Ordnung, so ist G lokal-endlich.

Damit ist $(D, \cdot, e)$ für jedes $e \in D$ lokal-endlich. Es sei nun $(V, \circ)$ eine endlich erzeugte distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ und k ein Element aus V . Nach BELOUSOV (§2, S. 277) ist $(V, \cdot, k)$ eine Unterloop der zu $(D, \circ)$ gehörigen kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, k)$. Es sei W ein endliches Erzeugendensystem für $(V, \circ)$. Da $(D, \circ)$ total-symmetrisch ist, sind die Rechtstranslationen von $(D, \circ)$ involutorische Automorphismen in $R(D)$, der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Jedes Element $x \in V$ besitzt in $(V, \circ)$ eine Darstellung, in der lediglich Elemente von W auftreten. Wegen Hilfssatz 5 und Beziehung (12) besitzt somit jedes $x \in V$ in $(V, \cdot, k)$ eine Darstellung, in der nur Elemente aus W und Elemente der Form xR_k , $x \in W$, auftreten können ($R_k^2 = 1$). Jetzt gilt in $(D, \cdot, k)$ (Lemma 3):

$$1) \quad xR_k = x^2 = xx, \quad 2) \quad zx^2 = (zx)x, \quad \text{für beliebige } z, x \in D.$$

Die Beziehung 2) gilt in jeder kommutativen Moufang-Loop (BRUCK, [3]).

Wie wir sahen, treten in jeder Darstellung eines Elementes $x \in V$ bezüglich $(V, \cdot, k)$ nur Elemente aus W auf, also wird $(V, \cdot, k)$ von den Elementen aus W erzeugt. Da $(D, \cdot, k)$ lokal-endlich ist, ist $(V, \cdot, k)$ endlich und mithin $(V, \circ)$ endlich. Wegen Hilfssatz 6 und da $(V, \circ)$ beliebig in $(D, \circ)$ gewählt,

ist jede endlich erzeugte Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ endlich und Lemma 6 gezeigt.

Lemma 6 beweist nun die Behauptung iv) und Satz 1 ist gezeigt.

Bemerkung: I.a. wird die abgeleitete Unterloop $(D', \circ)$ einer kommutativen Moufang-Loop $(D, \circ)$ mit der Unterloop aus Satz 1 nicht übereinstimmen. Es kann also Elemente der Ordnung 3 in $(D, \circ)$ geben, die nicht in der abgeleiteten Unterloop liegen. Argumentiert man wie im Beweis von iii) für $(D', \circ)$, so gehört zur abgeleiteten Unterloop ein total-symmetrischer Normalteiler $(D', \circ)$ in $(D, \circ)$, der exakt die Eigenschaften aus iii) besitzt. Wir werden im nächsten Paragraphen eine weitere Charakterisierung der Elemente von $(D', \circ)$ vornehmen.

2.3 Eine funktorielle Beschreibung des Zusammenhangs:

Kommutative distributive Quasigruppen-Kommutative Moufang-Loops
MANIN (§6, Theorem 6.1) hat gezeigt, daß die Kategorie der distributiven TS-Quasigruppen zur Kategorie der kommutativen Moufang-Loops vom Exponenten 3 äquivalent ist. Wir erweitern in diesem Abschnitt die Aussage MANIN'S für kommutative distributive Quasigruppen. Dabei verwenden wir wesentlich die Ergebnisse von BELOUSOV hinsichtlich der Konstruktion einer kommutativen distributiven Quasigruppe aus einer kommutativen Moufang-Loop der Eigenschaft: Die Abbildung $x \mapsto x^2$ ist eine Permutation der Loop.

Satz 2:

Es sei $f: (D, \circ) \rightarrow (G, \circ)$ ein Morphismus kommutativer distributiver Quasigruppen. Dann induziert f für jedes $e \in D$ einen Morphismus $f': (D, \circ) \rightarrow (G, *, f(e))$ der nach BELOUSOV zugehörigen kommutativen Moufang-Loops. Sei umgekehrt $g: (D, \circ) \rightarrow (G, *, e')$ ein Morphismus kommutativer Moufang-Loops der Eigenschaft:

- (23) Für $x \in D$ bzw. $x \in G$ ist die Abbildung $x \mapsto x^2$ ein Automorphismus von $(D, \circ)$ bzw. $(G, *, e')$.

Es seien R_1^{-1} bzw. R_2^{-1} die Automorphismen gemäß (23) für $(D, \cdot, e)$ bzw. $(G, *, e')$. Dann existiert ein Morphismus $g': (D, \circ) \longrightarrow (G, \otimes)$ derjenigen kommutativen distributiven Quasigruppen $(D, \circ)$ bzw. $(G, \otimes)$, die durch die Vorschrift:

$$(24) \quad \begin{aligned} x \circ y &:= (x \cdot y) R_1^{-1}, & x, y \in D \\ x \otimes y &:= (x * y) R_2^{-1}, & x, y \in G \end{aligned} \quad \text{bzw.}$$

bestimmt sind.

Korollar 1: Zwei kommutative distributive Quasigruppen sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen kommutativen Moufang-Loops isomorph sind. Umgekehrt sind zwei kommutative Moufang-Loops die (23) erfüllen genau dann isomorph, wenn dies für die gemäß (24) zugehörigen kommutativen distributiven Quasigruppen zutrifft.

Korollar 2: Die Kategorie der kommutativen distributiven Quasigruppen ist äquivalent zur Kategorie der kommutativen Moufang-Loops der Eigenschaft (23).

Bemerkung: Der Funktor, der die Äquivalenz bewirkt, transformiert die kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ mit ausgezeichnetem Element e in die zugehörige kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$. Mit Hilfssatz 6 sind für jedes $k \in D$ die kommutativen Moufang-Loops $(D, \cdot, k)$ zueinander isomorph. Identifiziert man die Elemente der Isomorphieklassse $[(D, \cdot, k)]_{k \in D}$ so hängt der Morphismus f' von Satz 2 nicht mehr von der Wahl des Elements $e \in D$ ab, insbesondere ist $(D, \circ)$ in eindeutiger Weise (bis auf Isomorphie) eine kommutative Moufang-Loop der Eigenschaft (23) zugeordnet.

Beweis von Satz 2:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe. Wie gezeigt, kann für jedes $e \in D$ eine kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ zugeordnet werden durch

$$(25) \quad (x \circ y) R_e^{-1} =: x \cdot y, \quad x, y \in D.$$

Da mit Lemma 3 die Abbildung $x \longmapsto x^2 = x R_e^{-1}$ ein Automorphismus von $(D, \cdot, e)$ ist, gilt das auch für die Abbildung $x \longmapsto x' := x R_e$,

$x \in D$. Offenbar gilt für alle $x \in D$ in $(D, \cdot, e)$ die Beziehung:

$$(26) \quad x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = x.$$

Die Beziehung (25) läßt sich jetzt schreiben:

$$(27) \quad (x \circ y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in D.$$

Es sei nun $f : (D, \circ) \longrightarrow (G, \otimes)$ ein Morphismus kommutativer distributiver Quasigruppen. Für $e \in D$ betrachten wir die zugehörigen kommutativen Moufang-Loops $(D, \cdot, e)$ und $(G, *, e')$, wobei $e' = f(e)$. Es erfüllen beide Moufang-Loops die Beziehung (27). Daher gilt:

$$(28) \quad f(x \circ y) = f(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}) = f(x) \otimes f(y) = f(x)^{\frac{1}{2}} * f(y)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen in (28) für y das Element $e \in D$ und erhalten

$$(29) \quad f(x \circ e) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x) \otimes f(e) = f(x)^{\frac{1}{2}} * f(e)^{\frac{1}{2}} = \\ = f(x)^{\frac{1}{2}} * e' = f(x)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Beziehungen (28) und (29) gelten für alle x und alle $y \in D$. Aus (28) und (29) folgt

$$(30) \quad f(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{2}}) f(y^{\frac{1}{2}}), \quad x, y \in D.$$

Wegen (30) induziert f in trivialer Weise einen Morphismus $f' : (D, \cdot, e) \longrightarrow (G, *, e')$ und der erste Teil der Behauptung von Satz 2 ist gezeigt.

Es sei nun umgekehrt $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop die (23) erfüllt. Es bezeichne R^{-1} den Automorphismus von (23). Nach BELOUSOV (Lemma 8 und §5) ist $(D, \circ)$ definiert durch

$$(31) \quad x \circ y := (xy)R, \quad x, y \in D \text{ und } R := (R^{-1})^{-1},$$

eine kommutative distributive Quasigruppe. Wir setzen wieder: $xR := x^{\frac{1}{2}}$ mit $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$, $x \in D$. Es sei $g : (D, \cdot, e) \longrightarrow (G, *, e')$ ein Morphismus kommutativer Moufang-Loops, die (23) erfüllen. Wir betrachten die gemäß Vorschrift (31) jeweils zugehörigen kommutativen distributiven Quasigruppen $(D, \circ)$ und $(G, \otimes)$.

Es gilt wegen (31):

$$(32) \quad g(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}) = g(x^{\frac{1}{2}}) * g(y^{\frac{1}{2}}) = (g(x^{\frac{1}{2}}) \otimes g(y^{\frac{1}{2}}))^2, \quad x, y \in D.$$

Wir setzen in (32) für y das Element x und erhalten

$$(33) \quad g(x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}) = g(x) = g(x^{\frac{1}{2}}) * g(x^{\frac{1}{2}}) = (g(x^{\frac{1}{2}}) \circ g(x^{\frac{1}{2}}))^2 = \\ = (g(x^{\frac{1}{2}}))^2, \quad x \in D.$$

Offenbar ist der Automorphismus $x \mapsto x^2$ von $(G, *, e')$ mit (31) auch ein Automorphismus von $(G, \circ)$, womit aus (32) und (33) die Beziehung

$$(34) \quad g(x \circ y) = g(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}) = g(x^{\frac{1}{2}})^2 \circ g(y^{\frac{1}{2}})^2 = g(x) \circ g(y), \quad x, y \in D,$$

folgt. Damit ist der Satz gezeigt.

Die beiden Korollare sind triviale Folgerungen aus Satz 2.

Aus Satz 2 folgt mit Lemma 2 sofort

Lemma 7: Es sei $(D, \cdot, e)$ eine endliche kommutative Moufang-Loop, die (23) erfüllt. Dann ist die Ordnung von $(D, \cdot, e)$ ungerade.

Umgekehrt ist für jede kommutative Moufang-Loop G ungerader Ordnung die Abbildung $x \mapsto x^2$ ein Automorphismus von G (BELOUSOV, Theorem 10). Damit lassen sich endliche kommutative distributive Quasigruppen und kommutative Moufang-Loops ungerader Ordnung nach Satz 2 eineindeutig (bis auf Isomorphie) aufeinander beziehen.

2.4 Kommutative distributive Quasigruppen mit auflösbarer Automorphismengruppe $R(D)$.

Die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ einer endlichen distributiven Quasigruppe $(D, \cdot)$ ist nach FISCHER auflösbar. SMITH hat gezeigt, daß in diesem Fall die Kommutatorgruppe $R(D)'$ sogar nilpotent ist. Mit SANDU kann man das Ergebnis von SMITH auf endlich erzeugte distributive Quasigruppen ausdehnen. Die Frage, ob alle distributiven Quasigruppen eine auflösbare von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe besitzen, wurde ebenfalls von SANDU negativ beantwortet. SANDU hat sein Gegenbeispiel aus einer geeignet konstruierten nicht-endlichen FISCHER-Gruppe (MANIN, Definition 3.2) nach der Methode von MANIN erhalten. Auf diese Weise gewinnt man jedoch gerade total-symmetrische (kommutative) distributive Quasigruppen (MANIN, Theorem 3.3

und Definition 7.1). Mit Lemma 6 sind total-symmetrische distributive Quasigruppen lokal-endlich und wir erhalten die Aussage:

Es gibt lokal-endliche kommutative distributive Quasigruppen, deren von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ nicht auflösbar ist.

Wir fragen nun zunächst nach Bedingungen für die Nilpotenz von $R(D)$.

Definition 8: Es sei $D := (D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop mit Zentrum $Z(D)$. Wir definieren eine Zentralreihe $Z_i(D)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, durch

$$Z_0(D) := \{e\} \text{ und } Z_i(D)/Z_{i-1}(D) = Z(D/Z_{i-1}(D)), i = 1, 2, \dots$$

Die Loop D heißt nun zentral-nilpotent, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, derart, daß $Z_k(D) = D$. Die Zahl k heißt die Nilpotenzklasse von D .

Es sei $(D, \circ)$ eine distributive Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe. Weiterhin sei für $e \in D$, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop, $M(D)$ die Multiplikationsgruppe der Loop. Da $M(D) = R(D)'$ (SMITH, Prop. 2), ergibt sich als Folge von BRUCK, [3], Theorem 11.5 der Satz:

Satz 3:

Für distributive Quasigruppen gilt:

Die Kommutatorgruppe $R(D)'$ der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe $R(D)$ einer distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ ist genau dann nilpotent, wenn die zugehörige kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ zentral-nilpotent ist (für ein $e \in D$ und damit für alle $e \in D$).

Gruppoiden $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ heißen zueinander isotop, wenn es ein geordnetes Tripel (α, β, f) von eineindeutigen Abbildungen α, β, f von G auf H gibt, so daß für alle $x, y \in G$ gilt:

$$(35) \quad (x\alpha) \circ (y\beta) = (x.y)f,$$

Damit läßt sich Satz 3 auch formulieren:

Satz 3':

Für eine distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ ist $R(D)'$ genau dann nilpotent, wenn $(D, \circ)$ zu einer zentral-nilpotenten kommutativen Moufang-Loop isotop ist.

Beweis:

Für $e \in D$ ist die distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ offenbar isotop zu $(D, \cdot, e)$, der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop. Die Isotopie von Gruppoiden ist eine Äquivalenzrelation, weiterhin sind isotope kommutative Moufang-Loops isomorph (BRUCK [3], S.56). Ist nun $(D, \circ)$ zu einer zentral-nilpotenten kommutativen Moufang-Loop $(G, \cdot, e')$ isotop, so gilt für jedes $e \in D$: $(D, \cdot, e) \cong (G, \cdot, e')$. Satz 3 beweist nun Satz 3'.

Da es Beispiele für kommutative distributive Quasigruppen gibt (die Konstruktion SANDUÉS kann auf mannigfache Weise durchgeführt werden), deren Automorphismengruppe $R(D)$ nicht auflösbar ist, ist folgende Frage von Interesse: Gibt es notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die Auflösbarkeit von $R(D)$?

Definition 9: Es sei $D := (D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop, $D' := (D', \cdot, e)$ die abgeleitete Unterloop von D . Für normale Unterloops A, B, C von D bezeichne (A, B, C) die von allen Assoziatoren (a, b, c) , a, b, c aus A, B, C , erzeugte Unterloop von D (vgl. BRUCK [3], Kap VIII, §4). Weiterhin bezeichne $\{D^{(i)}\}_{i=0,1,2,\dots}$ die abgeleitete Reihe von D definiert durch

$$D^{(0)} = D, \quad D^{(i+1)} = (D^{(i)})' = (D^{(i)}, D^{(i)}, D^{(i)}) .$$

Eine kommutative Moufang-Loop D heißt auflösbar, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, mit $D^{(k)} = \{e\}$.

Eine kommutative Moufang-Loop D ist eine Abelsche Gruppe genau dann, wenn $D' = \{e\}$, e das Einselement in D . Damit ist klar, daß für die Elemente der abgeleiteten Reihe gilt:

$D^{(i)} / D^{(i+1)}$ ist eine Abelsche Gruppe für $i=0,1,2,\dots$ (vgl. Hilfssatz 2, ii, b)).

Satz 4:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die Automorphismengruppe und $(D, ., e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Dann gilt:
Ist die Gruppe $R(D)$ auflösbar, so folgt die Auflösbarkeit der Loop $(D, ., e)$.

Der folgende Beweis von Satz 4 läßt vermuten, daß die Aussage von Satz 4 i.a. nicht umkehrbar ist. Es ist uns nicht bekannt, daß eine entsprechende Aussage allgemein für (nicht-endliche) distributive Quasigruppen gilt. Im Falle einer endlich erzeugten distributiven Quasigruppe greift Satz 3, wir lassen diesen Fall daher unberücksichtigt. Zum Beweis des Satzes sind zwei Hilfsergebnisse erforderlich, die im folgenden gezeigt werden.

Hilfssatz 7: Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, ., e)$ die zugehörige Moufang-Loop und $M(D) = R(D)'$ die Multiplikationsgruppe von $(D, ., e)$. Ist $(D', ., e)$ die abgeleitete Unterloop von $(D, ., e)$ und $M(D') \leq M(D)$, definiert durch $M(D') := \langle \{ m_x : x \in D' \} \rangle$, so gilt:

$$(36) \quad M(D)' = M(D')^* ,$$

wobei $M(D')^*$ gemäß Definition 6, (10) der zu $(D', ., e)$ gehörige Normalteiler in $M(D)$ ist.

Definition 10: Es sei $(D, ., e)$ eine kommutative Moufang-Loop, $M(D)$ die Multiplikationsgruppe der Loop. Für $m_x, m_y \in M(D)$ definieren wir eine Permutation $m(x, y)$ von $(D, ., e)$ durch

$$(37) \quad m(x, y) := m_x m_y m_{xy}^{-1} , x, y \in D .$$

$m(x, y) \in M(D)$ heißt eine innere Abbildung von $(D, ., e)$ und $(M(D) \ni) \mathbb{I} := \langle \{ m(x, y) : x, y \in D \} \rangle$ die Gruppe der inneren Abbildungen von $(D, ., e)$.

Hilfssatz 8: Es sei $(D, ., e)$ eine kommutative Moufang-Loop mit Multiplikationsgruppe $M(D)$ und innerer Abbildungsgruppe $\mathbb{I}$. Dann gilt:

- i) $\mathbb{I}$ ist eine Gruppe von Automorphismen von $(D, ., e)$;
- ii) $\mathbb{I} \leq M(D)'$, $M(D)'$ die Kommutatorgruppe von $M(D)$.

Beweis: BRUCK, [2], Kap. II, Theorem 7B, iv) und Theorem 7D, i).

Zum Beweis von Hilfssatz 7 benötigen wir das folgende Lemma, welches auch für spätere Überlegungen von Nutzen sein wird.

Lemma 8: Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Weiterhin sei $\mathbb{I}$ die Gruppe der inneren Abbildungen in $M(D)$, der Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Dann gilt für alle $x, y, z \in D$:

- i) $m(x, y) = [m_x^{-1}, m_y] = [m_y, m_x]$; wobei $[m_x, m_y]$ der Kommutator der beiden Multiplikationen m_x, m_y ist.
- ii) $m(x, y) = m(y, x)^{-1}$.
- iii) $m(x, y)^3 = 1$, 1 das Einselement in $M(D)$.
- iv) $m(x, y)$ zentralisiert $m_x, m_x^{-1}, m_y, m_y^{-1}$.
- v) Es sei (x, y, z) ein beliebiger Assoziator in der abgeleiteten Unterloop $(D', \cdot, e)$ von $(D, \cdot, e)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} m(x, y, z) &= m_x m(y, z)^{-1} m_x m(y, z) m_x^{-2} = \\ &= [m_x m(y, z)^{-1} m_x^{-1}] [m_x^2 m(y, z) m_x^{-2}] \quad . \end{aligned}$$

Beweis:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ für $e \in D$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Für beliebige $x, y \in D$ und e das Einselement in $(D, \cdot, e)$, sei $(V, \circ)$ die von den Elementen x, y, e erzeugte kommutative distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$. Es gilt:

- 1) Da $e \in V$, ist $(V, \cdot, e)$ eine Unterloop von $(D, \cdot, e)$ (BELOUSOV, S. 277).
- 2) Da $(V, \circ)$ von drei Elementen erzeugt wird, ist $(V, \circ)$ transitiv (BELOUSOV, Folgerung 1 zu Theorem 8). Nach SANDU (Behauptung 3) ist somit die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(V)$ metabelsch.

Bemerkung: Man überzeugt sich leicht davon, daß die transitiven distributiven Quasigruppen BELOUSOV's gerade die distributiven Quasigruppen mit metabelscher Automorphismen-

gruppe $R(D)$ sind. Wir werden daher meist die Bezeichnungsweise "transitiv" vermeiden.

3) Wegen Lemma 1 gilt:

$$R(V) \cong (\langle V^D \rangle) / Z(\langle V^D \rangle).$$

4) Wegen 2) ist $R(V)$ metabelsch und mit 3) liegt $\langle V^D \rangle''$ im Zentrum von $\langle V^D \rangle$. Damit ist wegen 1) und mit Lemma 4 die Loop $(V, \cdot, e)$ eine Abelsche Gruppe. Wegen Lemma 1 wird $\langle V^D \rangle$ von der Klasse konjugierter Elemente $V^D := \{R_x : x \in V\}$ erzeugt. Damit wird $\langle V^D \rangle'$ von den Elementen $R_x R_y^{-1}$, $x, y \in V$ erzeugt.

Wir betrachten nun das Element $\alpha \in \langle V^D \rangle$, definiert durch

(38) $\alpha = [R_e R_x^{-1}, R_y R_x^{-1}]$, e, x, y die erzeugenden Elemente von $(V, \cdot)$. Dann liegt α in $\langle V^D \rangle''$ und somit $\alpha \in Z(\langle V^D \rangle) =: Z$. Da $\alpha \in Z$ folgt mit (38) die Beziehung

$$(39) \quad \alpha = R_x R_y^{-1} R_e R_x^{-1} R_y R_e^{-1} = R_x R_e^{-1} R_e R_y^{-1} R_e R_x^{-1} R_y R_e^{-1}.$$

Mit (15) erhält man aus (39) die Beziehung

$$(40) \quad \alpha = m_x m_y^{-1} m_x^{-1} m_y, \text{ wobei } m_x, m_y \text{ die Multiplikationen}$$

mit x, y in $M(D)$ sind. Da $\alpha \in Z$ erhält man aus (40)

$$(41) \quad \alpha = m_y^{-1} m_x^{-1} m_y m_x = m_y m_x m_y^{-1} m_x^{-1} = [m_y, m_x] = [m_y^{-1}, m_x^{-1}].$$

Nach Definition 10, (37) gilt jedoch

$$(42) \quad m(x, y) = m_x m_y m_{yx}^{-1} = m_x m_y m_{xy}^{-1}, \quad x, y \in D.$$

Unter Verwendung der Beziehung i) von Lemma 5 ergibt sich aus (42) die Relation

$$(43) \quad m(x, y) = m_x m_y^{-1} m_x^{-1} m_y, \quad x, y \in D.$$

Die Beziehungen (40), (41) und (43) liefern unter Beachtung von $\alpha \in Z$ die Behauptungen i) - iv).

Wir zeigen nun die Aussage von v):

Es sei $R(D)$ die Automorphismengruppe von $(D, \cdot)$, $\alpha \in R(D)$ und D^D das invariante System von $R(D)$. Da sich jedes $\beta \in R(D)$ als endliches Produkt von Rechtstranslationen aus D^D darstellen läßt, erhält man mit Hilfssatz 1, i) für alle $x \in D$:

$$(44) \quad R_{(x\alpha)} = \alpha^{-1} R_x \alpha, \text{ vgl. FISCHER (Korollar zu Satz 2.1).}$$

Wegen Beziehung (8) gilt für alle $x, y, z \in D$:

$$x(x, y, z) = [(xy)z] (yz)^{-1} \quad \text{und mit (42) folgt} \\ (45) \quad x(x, y, z) = xm(y, z) .$$

Da $m(y, z) \in R(D)$, folgt mit (44) und (45) die Relation

$$(46) \quad R_x(x, y, z) = m(y, z)^{-1} R_x m(y, z) .$$

Aus der Beweisführung im Anschluß an 4) ergibt sich:

Ist $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe und e das Einselement der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop, so gilt für alle $y, z \in D$ und alle $m(y, z) \in \mathbb{J}$:

$$(47) \quad R_e^{-1} m(y, z) R_e = m(y, z) .$$

Da die Gruppe der inneren Abbildungen $\mathbb{J}$ von den Elementen $m(y, z)$ erzeugt wird, läßt der innere Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(M(D))$, definiert durch $\varphi(\alpha) = \alpha R_e$, die Gruppe $\mathbb{J}$ elementweise fest, $\alpha \in R(D)$.

Mit dieser Bemerkung erhalten wir aus (46) die Beziehung

$$(48) \quad R_x(x, y, z) R_e^{-1} = m(y, z)^{-1} R_x m(y, z) R_e^{-1} = m(y, z)^{-1} R_x R_e^{-1} m(y, z) \\ \text{und}$$

$$(49) \quad m_x(x, y, z) = m(y, z)^{-1} m_x m(y, z) , \quad x, y, z \in D .$$

Lemma 5 mit (49) beweist nun die Behauptung v).

Bemerkungen:

i) Wegen Hilfssatz 1, iv) läßt jede innere Abbildung $m(x, y)$ von $(D, \cdot, e)$ die von den zwei Elementen x, y erzeugte Unterloop elementweise fest. I. a. ist jedoch $m(x, y)$ nicht trivial.

ii) $m(x, y)$ läßt, wie gezeigt, die von den drei Elementen x, y, e erzeugte distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ elementweise fest. Wegen Lemma 8 hat jedes dieser Elemente $m(x, y)$ in $M(D)$ die Ordnung 3. Wir weisen an dieser Stelle schon darauf hin, daß es sich bei den inneren Abbildungen $m(x, y)$ gerade um die Automorphismen der Ordnung 3 in $R(D)$ handelt, deren Existenz STRAMBACH in seiner Bedingung zu Satz 1 ausschloß.

Mit Lemma 8 und Hilfssatz 8 läßt sich jetzt Hilfssatz 7 zeigen.

Beweis von Hilfssatz 7:

Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 gegeben.

1) Die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ der kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ wird von allen Assoziatoren $(x, y, z), x, y, z \in D$, erzeugt. Nach den Rechenregeln für Assoziatoren (BRUCK, [2]), ist mit (x, y, z) auch $(x, y, z)^{-1}$ ein Assoziator in $(D', \cdot, e)$. Mit Lemma 5 erhalten wir daher

$$(50) \quad M(D') = \langle \{m_{(x,y,z)} : x, y, z \in D\} \rangle.$$

Die Gruppe $M(D')$ wird also von allen Multiplikationen mit Assoziatoren aus D' erzeugt. Wegen Hilfssatz 8, ii) liegt die Gruppe der inneren Abbildungen $\mathbb{J}$ in der Kommutatorgruppe $M(D)'$ von $M(D)$, der Multiplikationsgruppe der Loop $(D, \cdot, e)$. Aus Behauptung v) von Lemma 8 folgt daher

$$(51) \quad M(D') \subseteq M(D)'.$$

2) Wir betrachten nun den Normalteiler $M(D')^* \trianglelefteq M(D)$. Es sei $D := (D, \cdot, e)$ und $D' := (D', \cdot, e)$.

a) Zunächst gilt (ALBERT):

$$(52) \quad eM(D')^* = D'.$$

b) Wegen BRUCK ([2], Kap. I, Theorem 38) besitzt jedes $\alpha \in M(D)$ eine eindeutige Darstellung:

$$(53) \quad \alpha = \theta m_x, x \in D \text{ und } \theta \in \mathbb{J}.$$

c) Im Beweis von Lemma 8 haben wir gezeigt, daß das Einselement $e \in D$ von jedem erzeugenden Element von $\mathbb{J}$ festgelassen wird, also

$$(54) \quad e\mathbb{J} = e.$$

Wegen b) besitzt jedes Element $\alpha \in M(D')^*$ eine eindeutige Darstellung gemäß (53) und wegen a) und b) kann die Darstellung von α nur wie folgt aussehen:

$$(55) \quad \alpha = \theta m_z, z \in D' \text{ und gewisse } \theta \in \mathbb{J}.$$

d) Da $D' \triangleleft D$ und mit (50) folgt für alle $x \in D$ und alle $\theta \in \mathbb{J}$:

$$(56) \quad D'(\theta x) = D'x.$$

Somit treten in der Darstellung (55) alle $\theta \in \mathbb{J}$ auf, insbesondere $\mathbb{J} \trianglelefteq M(D')^*$.

Mit 1) und 2) folgt sofort $M(D')^* \leq M(D)'$.

3) Wir zeigen: $M(D')^* \geq M(D)'$.

Zunächst ist die Faktorloop D/D' eine Abelsche Gruppe.

Damit ist jedoch $M(D/D')$ eine Abelsche Gruppe. Wegen Hilfssatz 4 gilt:

$$M(D/D') = M(D)/M(D')^*,$$

und $M(D')^*$ ist ein Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe.

Mit Hilfssatz 7 und Lemma 8 sind wir nun in der Lage, unseren Satz 4 zu beweisen.

Beweis von Satz 4:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, ., e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Weiterhin sei die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ auflösbar. $(D, \circ)$ sei im folgenden nicht trivial. Da $R(D)$ auflösbar ist, gilt das auch für die Multiplikationsgruppe $M(D) = R(D)'$ (Lemma 4). Es bezeichne $\{M(D)^{(i)}\}_{i=0,1,\dots}$ die absteigende Kommutatorkette von $M(D)$ definiert durch

$$M(D)^{(0)} = M(D) \text{ und } M(D)^{(i+1)} = (M(D)^{(i)})'.$$

Mit den Bezeichnungen von Definition 9 ist $\{M(D)^{(j)}\}_{j=0,1,\dots}$ eine Folge von Untergruppen in $M(D)$. Wir zeigen:

Für jede nicht-negative ganze Zahl i gilt: $M(D)^{(i)} \leq M(D)^{(i)}$.

Wir führen den Beweis durch Induktion über die hochgestellten Indizes.

1. Für $i = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig.

2. $i = 1$: Wegen Hilfssatz 8 gilt:

$$M(D') \leq M(D')^* = M(D)' \leq M(D).$$

3. $i = 2$: $D^{(2)} = (D', D', D')$, $D^{(2)}$ ist also die abgeleitete Unterloop von D . Damit wird $M(D^{(2)})$ von allen Multiplikationen der Form $m(x, y, z)$, $x, y, z \in D'$, erzeugt. Offenbar ist $M(D^{(2)})$ eine Untergruppe von $M(D')$. Wegen Lemma 8, v) gilt:

$$M(D^{(2)}) \leq M(D')'.$$

Da $M(D') \leq M(D)'$, folgt $M(D')' \leq M(D)^{(2)}$ und somit

$M(D^{(2)}) \leq M(D)^{(2)}$. Da wegen $M(D)$ auflösbar, auch jedes Element aus $\{M(D^{(i)})\}_{i=0,1,\dots}$ auflösbar ist, folgt zuzätzlich: $M(D^{(2)}) \subset M(D^{(1)})$.

4. Es gelte nun für jedes i, j mit $2 \leq i \leq k$ und $2 \leq j \leq k-1$:

$$M(D^{(i)}) \leq M(D)^{(i)} \quad \text{und} \quad M(D^{(j+1)}) \subset M(D^{(j)})$$

Eine zu 3. völlig analoge Argumentation hat

$$M(D^{(k+1)}) \leq M(D)^{(k+1)} \quad \text{und} \quad M(D^{(k+1)}) \subset M(D^{(k)})$$

zur Folge und unsere Behauptung ist gezeigt.

Wir haben mehr gezeigt, nämlich:

Es existiert in $M(D)$ eine echt absteigend Folge von Untergruppen $\{M(D^{(i)})\}_{i=0,1,\dots}$ derart, daß $M(D^{(i)}) \leq M(D)^{(i)}$, $i=0,1,\dots$.

Da $M(D)$ auflösbar ist, bricht die Folge nach endlich vielen Schritten ab, d.h. es existiert eine positive ganze Zahl k derart, daß $M(D^{(k)})$ trivial in $M(D)$ ist. Ist aber $M(D^{(k)})$ trivial, so folgt sofort $D^{(k)} = \{e\}$ und die abgeleitete Reihe $\{D^{(i)}\}_{0 \leq i \leq k}$ ist eine echt absteigende Folge von Unterloops in D , d.h. es gilt:

$$D \supset D' \supset D^{(2)} \supset \dots \supset D^{(k)} = \{e\}$$

Damit ist Satz 4 gezeigt.

Wir bemerken folgendes:

Da $eM(D^{(i)}) = D^{(i)}$, für jedes nicht-negative ganze i , folgt aus $M(D^{(i)}) \subset M(D^{(i-1)})$ sofort $D^{(i)} \subset D^{(i-1)}$.

3. Kommutative distributive Quasigruppen mit $R(D)$ 'nilpotent von der Klasse $k \leq 3$

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe mit zugehöriger kommutativer Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$. Ist die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ von $(D, \circ)$ metabelsch, so ist wegen Lemma 4, i) die Multiplikationsgruppe $M(D) = R(D)'$ Abelsch und mithin $(D, \cdot, e) \cong M(D)$ und selbst eine Abelsche Gruppe. Hieraus folgt ins-

besondere, daß die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ von $(D, \cdot, e)$ trivial ist. Ebenso ist die Gruppe der inneren Abbildungen $\mathbb{I}$ in $M(D)$ trivial (Hilfssatz 7). Kommutative distributive Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$ sind nun gerade die transitiven kommutativen Quasigruppen BELOUSOV'S. Wir zeigen, daß sich die hinreichenden Bedingungen BELOUSOV'S, die zur Transitivität einer distributiven Quasigruppe führen, im Falle kommutativer distributiver Quasigruppen zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen verschärfen lassen.

3.1 Das Konstruktionsverfahren nach K. STRAMBACH

STRAMBACH hat gezeigt, daß sich gewisse kommutative distributive Quasigruppen aus eindeutig 2-teilbaren Abelschen Gruppen gewinnen lassen:

Es sei ϕ eine eindeutig 2-teilbare Abelsche Gruppe. Dann ist die Abbildung $\alpha: x \longrightarrow 1/2 x$ ein Automorphismus von ϕ . Wir betrachten das semidirekte Produkt

$$(57) \quad G := \phi \lt \alpha \gt, \quad \lt \alpha \gt \text{ die von } \alpha \text{ erzeugte zyklische Gruppe und es gilt für alle } x \in G: \\ x^\alpha = \alpha^{-1} x \alpha = x/2.$$

Weiterhin sei D die Klasse der zu α in G konjugierten Elemente in G , sowie " $\circ$ " eine binäre Operation auf D , definiert durch

$$(58) \quad \gamma \circ \delta = \delta^{-1} \gamma \delta, \quad \gamma, \delta \in D.$$

K. STRAMBACH (Satz 1) hat nun gezeigt:

Hilfssatz 9: Das Gebilde $(D, \circ)$, definiert durch (57) und (58), ist eine kommutative distributive Quasigruppe. Die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ von $(D, \circ)$ ist isomorph zu G .

Umgekehrt hat STRAMBACH in seinem Satz bewiesen:

Jede kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$, die der folgenden Bedingung:

(59) Kein Element der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe $R(D)$, welche eine von drei verschiedenen Elementen aus $(D, \circ)$ erzeugte

Unterquasigruppe elementweise festläßt, hat die Ordnung drei;

genügt, ist isomorph zu einer der nach Hilfssatz 9 gewonnenen distributiven Quasigruppen.

Wir betrachten nun die Bedingung (59) näher.

i) Für eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ bezeichne $M(D)$ die Multiplikationsgruppe der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$, $e \in D$ beliebig. Die Gruppe der inneren Abbildungen $\mathbb{I}$ in $M(D)$ wird von den Permutationen $m(x, y)$, $x, y \in D$, erzeugt (Definition 10). Nach Lemma 8 ist $m(x, y)^3 = 1$ und $m(x, y)$ läßt die von den 3 Elementen e, x, y erzeugte Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ elementweise fest. Die Bedingung (59) hat nun sofort die Trivialität der Gruppe $\mathbb{I}$ zur Folge, womit $(D, \cdot, e)$ eine Abelsche Gruppe ist. Dann ist $(D, \cdot, e) \cong M(D) = R(D)$; $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$ (Lemma 4), also ist $R(D)$ metabelsch. Ist $(D, \cdot, e)$ eine Abelsche Gruppe, so folgt mit Lemma 3, daß $(D, \cdot, e)$ und daher $R(D)$ eindeutig 2-teilbar sind. Daher läßt sich $R(D)$ als semidirektes Produkt der eindeutig 2-teilbaren Abelschen Kommutatorgruppe $R(D)'$ mit der zyklischen Gruppe $\langle R_x \rangle$, $R_x \in D$, auffassen. Die Zuordnung $z \mapsto R_z$, $z \in D$, bildet nun offenbar D eineindeutig auf D^D ab. Wählt man eine Operation $*$ auf der Klasse D^D der zu R_x konjugierten Elemente in $R(D)$ durch (58), so ist $(D^D, *)$ eine kommutative distributive Quasigruppe nach Hilfssatz 9 und $z \mapsto R_z$, $z \in D$, ein Isomorphismus von $(D, \circ)$ auf $(D^D, *)$. Mit diesen Bemerkungen und mit Hilfssatz 9 ergibt sich der folgende Satz:

Satz 5:

Eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ hat dann und nur dann eine metabelsche von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$, wenn die Quasigruppe $(D, \circ)$ zu einer der kommutativen distributiven Quasigruppen von Hilfssatz 9 isomorph ist.

ii) Nach BOL gibt es eine von drei Elementen erzeugte kommutative Moufang-Loop der Ordnung 81, die keine Abelsche

Gruppe ist. Nach Satz 2 und Lemma 7 gehört zu G eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$, für die nach i) die Automorphismengruppe $R(D)$ nicht metabelsch sein kann. Auf diesen Sachverhalt hat BELOUSOV hingewiesen. MANIN (S. 21, 3.4) hat aus in geeigneter Weise gebildeten semidirekten Produkten von BURNSIDE-Gruppen $B(3, r-1)$, $r \geq 4$ und $\mathbb{Z}_2$ sogenannte nicht-Abelsche CH-Quasigruppen konstruiert. Aus MANIN (Theorem 3.3 und Definition 7.1) wird deutlich, daß es sich hier um endlich total-symmetrische (also kommutative) distributive Quasigruppen handelt, deren Automorphismengruppe $R(D)$ nicht metabelsch sein kann. STRAMBACH'S Bedingung (59) ist also nicht entbehrlich. Weiterhin zeigen die genannten Beispiele einen Irrtum in STRAMBACH, Satz 2, auf.

iii) Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Erfüllt die Quasigruppe $(D, \circ)$ die Bedingung (59), so ist, wie gezeigt, die Gruppe $\mathbb{J}$ der inneren Abbildungen von $(D, \cdot, e)$ trivial. Umgekehrt kann es jedoch in $R(D)$ nicht-triviale Elemente geben, welche die Ordnung drei besitzen und eine von drei Elementen erzeugte Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ elemente-weise festlassen, aber nicht in $\mathbb{J}$ liegen. Die Bedingung (59) ist demnach hinreichend für kommutative distributive Quasigruppen von Satz 5, ob (59) auch notwendig ist, ist uns nicht bekannt.

3.2 Ein Konstruktionsverfahren nach R.H. BRUCK

Unter den kommutativen Moufang-Loops sind diejenigen wohl-bekannt, deren Nilpotenzklasse $k \leq 2$ ist. BRUCK hat in [2] Konstruktionsverfahren für diese Loops beschrieben. Wir nutzen die Ergebnisse BRUCK'S, um alle diejenigen kommutativen distributiven Quasigruppen zu konstruieren, deren Automorphismengruppe $R(D)$ eine Kommutatorgruppe von der Nilpotenzklasse $k \leq 3$ besitzt.

Satz 6:

Es sei G eine Gruppe derart, daß $x \rightarrow x^3$, $x \in G$, ein Endomorphismus von G in das Zentrum von G ist. Weiterhin ent-

halte das Zentrum Z von G keine (nicht-trivialen) Elemente der Ordnung 2. Wir definieren eine Operation $\ast$ auf G durch

$$(60) \quad x \ast y = x^{-1}yx^2, \quad x, y \in G.$$

Dann gilt:

i) Das Gebilde $(G, \ast, 1)$, 1 das Einselement in G , ist eine kommutative Moufang-Loop.

ii) Ist $C := \mathcal{C}_G(G')$ der Zentralisator der Kommutatorgruppe G' in G , so ist $(C, \ast, 1)$ das Zentrum von $(G, \ast, 1)$.

iii) Die Abbildung $x \mapsto x^2$, $x \in G$, ist ein Automorphismus von $(G, \ast, 1)$.

iv) Die Loop $(G, \ast, 1)$ ist zentral-nilpotent von der Klasse $k \leq 2$; die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Gruppe G nilpotent von der Klasse $k = 3$ ist.

Beweis:

Für die Beweise von i), ii) und iv) siehe BRUCK, [2], Kap. II, Theorem 8D und Theorem 8E, i) und ii). Wir haben also lediglich die Behauptung iii) zu zeigen.

Zunächst gilt wegen (60) die Beziehung:

$$(61) \quad x \ast x = x^2, \quad x \in G.$$

Wegen (61) kann die Loop $(G, \ast, 1)$ keine nicht-trivialen Elemente der Ordnung 2 enthalten. Angenommen $(G, \ast, 1)$ enthält ein Element $z \neq 1$ der Ordnung 2, so gilt $z^2 = 1$ in der Gruppe G . Da die Abbildung $x \mapsto x^3$ ein zentralisierender Endomorphismus von G ist, liegt mit z^2 auch z im Zentrum von G , was der Voraussetzung von Satz 6 widerspricht.

Es seien nun x, y Elemente aus G , für die in $(G, \ast, 1)$ gilt:

$$(62) \quad x^2 = y^2, \text{ also } x^2 \ast y^{-2} = 1$$

(in kommutativen Moufang-Loops gilt die "inverse property", BRUCK, [3]). Mit der Moufang-Identität ((7)) erhält man aus (62) die Relation:

$$(63) \quad (x \ast x) \ast y^{-2} = (x \ast y^{-1}) \ast (x \ast y^{-1}) = (x \ast y^{-1})^2 = 1.$$

Da $(G, *, 1)$ keine nicht-trivialen Elemente der Ordnung 2 enthält, folgt mit (63) sofort $x * y^{-1} = 1$ und hieraus $x = y$. Des weiteren gilt für alle $x, y \in G$ in $(G, *, 1)$:

$$x^2 * y^2 = (x * x) * y^2 = (x * y) * (x * y) = (x * y)^2.$$

Wie gezeigt, ist die Abbildung $x \mapsto x^2$ ein Automorphismus von $(G, *, 1)$ und Satz 6 ist daher bewiesen.

Wir zeigen nun, daß durch Satz 6 alle diejenigen kommutativen distributiven Quasigruppen bestimmt sind, deren von den Rechts-translationen erzeugte Automorphismengruppe eine Kommutatorgruppe der Nilpotenzklasse $k \leq 3$ besitzt.

Satz 7:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Es gilt:
 $R(D)'$ ist genau dann nilpotent von der Klasse $k \leq 3$, wenn $(D, \circ)$ zu einer Unterloop der kommutativen Moufang-Loops von Satz 6 isotop ist.

Korollar: Es sei M die Menge aller kommutativen distributiven Quasigruppen, die nach Satz 2 aus allen kommutativen Moufang-Loops von Satz 6 und deren Unterloops konstruiert werden können. Weiterhin sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe derart, daß $R(D)'$ nilpotent von der Klasse $k \leq 3$ ist. Dann ist $(D, \circ)$ zu einer der Quasigruppen von M isomorph.

Beweis von Satz 7:

i) Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe. Weiterhin sei $(G, *, f)$ eine Unterloop der kommutativen Moufang-Loops von Satz 6. Es gelte:

$$(64) \quad (D, \circ) \text{ ist isotop zu } (G, *, f).$$

Es sei nun $(D, \cdot, e)$ die zu $(D, \circ)$ gehörige kommutative Moufang-Loop. Da isotope kommutative Moufang-Loops isomorph sind (BRUCK, [3]), folgt aus (64): $(D, \cdot, e) \cong (G, *, f)$. Wegen Satz 6, iv) ist $(G, *, f)$ und damit $(D, \cdot, e)$ zentral-nilpotent von der Klasse $k \leq 2$. Nach BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 11.5) ist die Multiplikationsgruppe $M(D)$ von $(D, \cdot, e)$ nilpotent von der Klasse $r \leq 3$. Wegen Lemma 4, i) gilt: $M(D) = R(D)'$, und die eine Richtung der Äquivalenz ist gezeigt.

ii) Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe derart, daß $R(D)'$ nilpotent von der Klasse $k \leq 3$ ist. Weiterhin sei $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop, $M(D)$ die Multiplikationsgruppe der Loop. Da $M(D) = R(D)'$, ist wegen BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 11.5) die Loop $(D, \cdot, e)$ nilpotent von der Klasse $k \leq 2$. Aus $(D, \cdot, e)$ nilpotent von der Klasse $k \leq 2$ folgt:

Für $\alpha \in M(D)$ ist die Abbildung $\alpha \longrightarrow \alpha^3$ ein zentralisierender Endomorphismus von $M(D)$ (BRUCK, [2], Kap. II, Theorem 7D). Da $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe ist, ist die Abbildung $x \longrightarrow x^2$ ein Automorphismus von $(D, \cdot, e)$. Demnach kann $M(D)$ keine nicht-trivialen Elemente der Ordnung 2 enthalten (das Zentrum der Loop $(D, \cdot, e)$ ist zum Zentrum der Gruppe $M(D)$ isomorph).

Wie gezeigt, erfüllt die Gruppe $M(D)$ die Voraussetzungen von Satz 6. Wir betrachten die durch (60) definierte kommutative Moufang-Loop $(M(D), *, 1)$. Die Abbildung $x \longrightarrow m_x, m_x$ die Multiplikation mit $x \in D$, bildet die Loop $(D, \cdot, e)$ eineindeutig in $(M(D), *, 1)$ ab. Wegen Lemma 5 ist die Abbildung $x \longrightarrow m_x$ ein Homomorphismus, denn $m_{xy} = m_y^{-1} m_x m_y^2 = m_x * m_y$, $x, y \in D$. Die kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ ist daher zu einer Unterloop von $(M(D), *, 1)$ isomorph und Satz 7 ist gezeigt.

Das Korollar ist mit Satz 2 eine triviale Folgerung aus Satz 7.

Bemerkung: Die total-symmetrischen distributiven Quasigruppen unter den distributiven Quasigruppen von Satz 7 gewinnt man, wenn man in Satz 6 für G eine Gruppe vom Exponenten 3 nimmt. Ist umgekehrt $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe einer total-symmetrischen distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ und $R(D)'$ nilpotent von der Klasse $k \leq 3$, so ist $R(D)'$ eine Gruppe vom Exponenten 3. Denn wie im Beweis von Satz 7 gezeigt, ist die Abbildung $\alpha \longrightarrow \alpha^3$, $\alpha \in R(D)'$, ein Endomorphismus von $R(D)'$ und $R(D)'$ ist die Multiplikationsgruppe einer (der zugehörigen) kommutativen Moufang-Loop vom Exponenten 3 (vgl. Satz 1), wird also von Multiplikationen der Ordnung drei erzeugt.

3.3 Kennzeichnung kommutativer distributiver Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$

BELOUSOV hat darauf hingewiesen, daß die von den Rechts-translationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ einer distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ metabelsch ist ($(D, \circ)$ transitiv), wenn $(D, \circ)$ keine distributive TS-Unterquasigruppe enthält. Mit Satz 1 können wir diesen Tatbestand wie folgt formulieren:

Lemma 9: Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, e beliebig aus D gewählt. Gilt für alle $x \in D$:

$$(65) \quad R_x^2 \neq R_e^2,$$

so ist die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ von $(D, \circ)$ metabelsch.

Beweis: Für ein beliebiges $e \in D$ sei $(D, \cdot, e)$ die zu $(D, \circ)$ gehörige kommutative Moufang-Loop. Wegen Satz 1, i) und ii), hat die Gültigkeit von (65) sofort zur Folge, daß die Loop $(D, \cdot, e)$ keine Elemente der Ordnung drei enthält. Insbesondere ist also die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ trivial in $(D, \cdot, e)$. Somit ist $(D, \cdot, e)$ eine Abelsche Gruppe und wegen Lemma 4 ist $M(D) = R(D)'$ Abelsch. Die Wahl von e ist wegen Hilfssatz 6 beliebig.

Der folgende Satz beschreibt die Eigenschaften kommutativer distributiver Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$.

Satz 8:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe. Dann sind äquivalent:

i) Für alle $w, x, y, z \in D$ gilt :

$$(66) \quad (w \circ x) \circ (y \circ z) = (w \circ y) \circ (x \circ z) \quad .$$

ii) Die von je drei, paarweise voneinander verschiedenen,

Rechtstranslationen R_x, R_y, R_z , $x, y, z \in D$, erzeugte Untergruppe von $R(D)$ ist metabelsch.

iii) Es gilt in $R(D)$:

$$(67) \quad M_e \cap R(D)'' = \{1\}, \text{ wobei}$$

1 das Einselement in $R(D)$, $e \in D$ beliebig gewählt und die Menge M_e durch $M_e := \{R_x R_e^{-1} : x \in D \text{ und } R_x^2 = R_e^2\}$ definiert ist.

iv) Die Gruppe $R(D)$ ist metabelsch.

Beweis:

i) $\Leftrightarrow$ iv) :

a) Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe in der die Beziehung (66) gilt. Weiterhin sei für ein beliebiges Element $e \in D$, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Dann gilt für alle $w, x, y \in D$ und $e \in D$:

$$(68) \quad w R_x R(y \circ e) = w R_y R(x \circ e) \quad , \text{ also insbesondere}$$

$$(69) \quad R_x R(y \circ e) = R_y R(x \circ e) \quad .$$

Mit der Beziehung (4) aus Paragraph 1 folgt aus (69):

$$R_x R_e^{-1} R_y R_e = R_y R_e^{-1} R_x R_e \quad \text{und hieraus}$$

$$(70) \quad R_x R_e^{-1} R_y R_e^{-1} = R_y R_e^{-1} R_x R_e^{-1} \quad .$$

Die Beziehung (70) liefert nun mit (15) sofort

$$(71) \quad m_x m_y = m_y m_x \quad , \text{ wobei } m_x, m_y \text{ die}$$

Multiplikationen mit x bzw. y von $(D, \cdot, e)$ sind. Die Beziehung (71) gilt für alle x und alle y aus D . Da die Multiplikationen m_x , $x \in D$, die Multiplikationsgruppe $M(D)$ von $(D, \cdot, e)$ erzeugen, ist $M(D)$ eine Abelsche Gruppe. Mit Lemma 4 gilt $M(D) = R(D)'$ und i) folgt iv) ist gezeigt.

b) Durchläuft man die Argumentationskette von a) rückwärts,

so folgt für ein fest gewähltes Element $e \in D$ und beliebige $w, x, y \in D$:

$$(72) (w \circ x) \circ (y \circ e) = (w \circ y) \circ (x \circ e) \quad .$$

Wegen Hilfssatz 6 gilt die Beziehung (72) für jedes $e \in D$ und mit a) und b) ist die Äquivalenz gezeigt.

ii) $\Leftrightarrow$ iv):

Hier ist offenbar nur zu zeigen: ii) $\Rightarrow$ iv) .

Für $x, y, z \in D$ seien R_x, R_y, R_z drei paarweise voneinander verschiedene Elemente aus D^D , der Klasse konjugierter Elemente in $R(D)$. Weiterhin sei V die von R_x, R_y, R_z erzeugte Untergruppe in $R(D)$. Wegen Lemma 1 gilt:

$$V \cap D^D = U^D := \{R_u : u \in U\} \quad ,$$

wobei $(U, \circ)$ die von den Elementen x, y, z erzeugte distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ ist. U^D ist eine Klasse konjugierter Elemente in V und die Gruppe V stimmt wegen Hilfssatz 1 mit der von den Elementen aus U^D erzeugten Untergruppe von $R(D)$ überein. Deshalb wird V' , die Kommutatorgruppe von V , von der Menge $K := \{\alpha \beta^{-1} : \alpha, \beta \in U^D\}$ erzeugt. Somit liegt das Element γ definiert durch

$$\gamma := [R_x R_y^{-1} \quad , \quad R_z R_y^{-1}]$$

in V' . Da die Gruppe V nach Voraussetzung metabelsch ist, ist V' trivial, also

$$1 = \gamma = R_y R_x^{-1} R_y R_z^{-1} R_x R_y^{-1} R_z R_y^{-1} \quad , \text{ oder}$$

$$(73) \quad 1 = R_x^{-1} R_y R_z^{-1} R_x R_y^{-1} R_z \quad \text{ oder}$$

$$(74) \quad R_z^{-1} R_x R_y^{-1} R_z = R_y^{-1} R_x \quad .$$

Die Beziehung (74) ist nun nach Voraussetzung für alle $x, y, z \in D$ richtig. Es sei $k \in D$ ein weiteres beliebig in D gewähltes Element. Nun gilt wegen (74) auch

$$(75) \quad R_k^{-1} R_x R_y^{-1} R_k = R_y^{-1} R_x \quad .$$

Aus (74) und (75) folgert man

$$(76) R_k R_z^{-1} R_x R_y^{-1} R_z R_k^{-1} = R_x R_y^{-1}, \text{ oder}$$

$$(77) R_k R_z^{-1} R_x R_y^{-1} = R_x R_y^{-1} R_k R_z^{-1}.$$

Die Beziehung (77) ist für alle $x, y, z, k \in D$ richtig. Nun wird die Kommutatorgruppe $R(D)'$ von $R(D)$ von den Elementen der Form $R_u R_v^{-1}$, $u, v \in D$ erzeugt (vgl. Abschnitt 1.1). Wegen (77) ist nun $R(D)'$ eine Abelsche Gruppe und die Implikation ist gezeigt.

iii) $\Leftrightarrow$ iv):

Hier ist nur zu zeigen: Aus iii) folgt iv).

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Für $e \in D$ gelte die Beziehung (67) in $(D, \circ)$.

Wir betrachten die zugehörige kommutative Moufang-Loop

$(D, \cdot, e)$. Wegen Lemma 4 gilt: $M(D) = R(D)'$, $M(D)$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Es sei x ein beliebiges Element der abgeleiteten Unterloop $(D', \cdot, e)$ von $(D, \cdot, e)$. Ist m_x die Multiplikation mit x , so folgt wegen Lemma 5 und mit Hilfssatz 2, ii) die Beziehung: $m_x^3 = 1$, 1 das Einselement in $M(D)$.

Mit den Beziehungen (15) und (20) - (22) ergibt sich:

$R_x^2 = R_e^2$, also $m_x \in M_e$. Wie der Beweis von Hilfssatz 7 zeigt, liegt für jedes $x \in D'$ die Multiplikation m_x in $M(D)'$, der Kommutatorgruppe der Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$.

Somit liegt für jedes $x \in D'$ die Multiplikation m_x im Durchschnitt von M_e mit $R(D)'' = M(D)'$. Nun folgt aus der Gültigkeit von (67): $m_x = 1$, für jedes $x \in D'$. Damit ist die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ trivial in $(D, \cdot, e)$ und $M(D)$ ist eine Abelsche Gruppe. Damit ist die Implikation gezeigt.

Wir haben in Satz 8 kommutative distributive Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$ charakterisiert. Der nächste Satz gestattet eine grobe Einteilung kommutativer distributiver Quasigruppen.

Satz 9:

Es sei $(D, \circ)$ eine nicht-triviale kommutative distributive Quasigruppe, $R(D)$ die Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Dann trifft für $(D, \circ)$ eine und nur eine der folgenden Eigenschaften zu:

- i) $R(D)$ ist metabelsch.
- ii) $(D, \circ)$ ist total-symmetrisch und $R(D)' = R(D)''$.
- iii) $(D, \circ) =: D$ besitzt einen echten total-symmetrischen Normalteiler $(U, \circ) =: U$ derart, daß $R(D/U)$ metabelsch ist und außerdem gilt: $R(D/U)' = R(D)'/R(D)''$.

Bemerkung: Distributive TS-Quasigruppen sind nach Satz 1, iv) lokal-endlich. Wegen SMITH kann es deshalb keine endlich erzeugten (endlichen) kommutativen distributiven Quasigruppen geben, die ii) erfüllen.

Beweis von Satz 9:

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Wir betrachten die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ in $(D, \cdot, e)$. $(D', \cdot, e)$ ist nach Hilfssatz 2 invariant unter den Automorphismen R_e, R_e^{-1} und Normalteiler in $(D, \cdot, e)$. Nach BELOUSOV ist somit $(D', \circ)$ ein Normalteiler von $(D, \circ)$ und mit Satz 1 ist $(D', \circ)$ total-symmetrisch. Weiterhin ist $(D, \cdot, e)/(D', \cdot, e)$ die zu $(D, \circ)/(D', \circ)$ gehörige kommutative Moufang-Loop (BELOUSOV, Theorem 4). Die Faktorloop $(D, \cdot, e)/(D', \cdot, e)$ ist eine Abelsche Gruppe und wegen Hilfssatz 4 und mit Hilfssatz 7 gilt:

$$(78) \quad M((D, \cdot, e)/(D', \cdot, e)) \cong M(D)/M(D)'.$$

Wegen Lemma 4 und mit (78) folgt nun

$$(79) \quad R((D, \circ)/(D', \circ))' \cong M(D)/M(D)'.$$

Setzt man jetzt $(U, \circ) =: (D', \circ)$, so besitzt $(U, \circ)$ die gewünschten Eigenschaften von Satz 9, iii).

Erfüllt die kommutative distributive Quasigruppe die Eigenschaft i), so kann sie offenbar nicht ii) sowie iii) erfüllen,

denn $(D',.,e)$ ist trivial. Stimmt die Loop $(D',.,e)$ mit der kommutativen Moufang-Loop $(D,.,e)$ überein, so gilt ii) und i) wie iii) können nicht gelten. Ist $(D',.,e)$ eine echte Unterloop von $(D,.,e)$, so gilt iii) und die Eigenschaften i) wie ii) sind trivialerweise ausgeschlossen. Damit ist Satz 9 gezeigt.

3.4 Minimale und einfache kommutative distributive Quasigruppen

In diesem Abschnitt geben wir zwei Klassen von kommutativen distributiven Quasigruppen mit metabelscher Automorphismengruppe $R(D)$ an.

Definition 11: Es seien A, B distributive Quasigruppen. Das direkte Produkt $A \circ B$ von A und B sei die Menge aller geordneten Paare (a, b) , $a \in A$ und $b \in B$, die folgendermaßen miteinander multipliziert werden:

$$(80) \quad (a, b) \circ (c, d) = (a \circ c, b \circ d),$$

$a, c \in A$ und $b, d \in B$.

Für endliche distributive Quasigruppen A, B gilt: $A \circ B$ ist eine distributive Quasigruppe (vgl. BURSTIN/MAYER, FISCHER). Sind A, B kommutative distributive Quasigruppen, die die Eigenschaft i) von Satz 8 erfüllen, so erkennt man aus (80), daß sich diese Eigenschaft auf das direkte Produkt von A und B überträgt. Dieser Sachverhalt läßt sich wie folgt allgemeiner formulieren:

Ist eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ (nicht notwendig endliches) direktes Produkt von kommutativen distributiven Quasigruppen, die jede für sich die Eigenschaft i) von Satz 8 erfüllen, so erfüllt auch $(D, \circ)$ diese Eigenschaft.

Definition 12: Eine distributive Quasigruppe heiße minimal, wenn sie außer sich selbst und den trivialen Unterquasigruppen keine weiteren distributiven Unterquasigruppen enthält.

Mit den vorstehenden Bemerkungen läßt sich nun der folgende

Satz formulieren:

Satz 10:

Ist die kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ direktes Produkt von minimalen kommutativen distributiven Quasigruppen, so ist die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$ metabelsch.

Beweis:

Es ist wegen Satz 8 nur zu zeigen:

(B1) Jede minimale kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ besitzt eine metabelsche von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe $R(D)$.

Ist $(D, \circ)$ trivial, so ist $R(D)$ natürlich metabelsch. Es sei also $(D, \circ)$ eine nicht-triviale minimale kommutative distributive Quasigruppe. $(D, \circ)$ kann offenbar die Eigenschaft iii) von Satz 9 nicht erfüllen. Somit erfüllt $(D, \circ)$ entweder ii) oder i) von Satz 9. Erfüllt $(D, \circ)$ die Eigenschaft i), so sind wir fertig. $(D, \circ)$ erfülle also die Eigenschaft ii) von Satz 9. Da $(D, \circ)$ somit total-symmetrisch ist, erzeugen je zwei Elemente aus D , die voneinander verschieden sind, eine kommutative distributive Quasigruppe der Ordnung 3. Damit folgt aus der Minimalität von $(D, \circ)$, daß $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe der Ordnung 3 ist. Daher ist jede zugehörige kommutative Moufang-Loop eine Loop der Ordnung 3. Da es keine nicht-assoziative kommutative Moufang-Loop der Ordnung 3 gibt (BRUCK, [2]), folgt ein Widerspruch zur Annahme. Damit erfüllt $(D, \circ)$ die Eigenschaft i) von Satz 9 und die Behauptung ist gezeigt.

Definition 13: Eine distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ heiße einfach, wenn $(D, \circ)$ außer sich selbst keine weiteren nicht-trivialen Normalteiler enthält.

Satz 11:

Es sei $(D, \circ)$ eine einfache kommutative distributive Quasigruppe. Dann ist die Gruppe $R(D)$ metabelsch.

Beweis:

Wir wenden wieder Satz 9 an. Es sei $(D, \circ)$ eine einfach nicht-triviale kommutative distributive Quasigruppe. (D, c) kann die Eigenschaft iii) von Satz 9 nicht erfüllen. Erfüllt $(D, \circ)$ die Eigenschaft i), so sind wir fertig. (D, c) erfülle also die Eigenschaft ii) von Satz 9. Um einen Widerspruch zu erzeugen, benötigen wir das folgende Ergebnis:

(81) Es sei $(D, \circ)$ eine distributive TS-Quasigruppe, $(D, ., e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop. Dann gilt:
Jede Unterloop $(U, ., e)$ von $(D, ., e)$ ist invariant unter den Automorphismen R_e, R_e^{-1} .

Beweis: Da $(D, \circ)$ total-symmetrisch ist, folgt: $R_e^2 = 1$, 1 die Eins in $R(D)$. Es sei nun $(U, ., e)$ eine Unterloop der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop $(D, ., e)$. Wegen (12) gilt für alle $x \in D$:

$$xR_e^{-1} = xR_e = x^2.$$

Ist nun x beliebig aus U , so folgt $xR_e^{-1} = xR_e \in U$ und (81) ist gezeigt.

Aufgrund unserer Annahme ist $(D, \circ)$ eine einfache distributive TS-Quasigruppe. Die zu $(D, \circ)$ gehörige kommutative Moufang-Loop ist nun einfach, d.h. $(D, ., e)$ besitzt keine echten Normalteiler. Angenommen, $(U, ., e)$ ist ein echter Normalteiler von $(D, ., e)$, so folgt mit (81), daß $(U, ., e)$ invariant unter R_e, R_e^{-1} ist. Damit wäre wegen BELOUSOV (§2, No 7) das Gebilde $(U, \circ)$ eine distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ und insbesondere normal in $(D, \circ)$. Die Quasigruppe $(D, \circ)$ ist jedoch einfach. Nach BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 11.1) ist jede einfache kommutative Moufang-Loop eine zyklische Gruppe, somit ist $M(D) = R(D)'$ zyklisch im Widerspruch zur Annahme. Dieser Widerspruch beweist nun Satz 11.

Mit Satz 8 ergibt sich sofort als Korollar zu Satz 11:

Korollar: Ist eine kommutative distributive Quasigruppe $(D, \circ)$ das direkte Produkt einfacher kommutativer distributiver Quasigruppen, so ist die Gruppe $R(D)$ metabelsch.

Wir merken an dieser Stelle an, daß in unsere Argumentation in den Abschnitten 3.3 und 3.4 wesentlich die Gültigkeit des Kommutativ-Gesetzes eingeht. Verwendet man BELOUSOV, Theorem 9, so läßt sich Satz 9 allgemein für distributive Quasigruppen wie folgt formulieren:

Satz 9':

Es sei $(D, \circ)$ eine nicht-triviale distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop, $(D', \cdot, e)$ die abgeleitete Unterloop von $(D, \cdot, e)$ und $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Dann trifft für $(D, \circ)$ eine und nur eine der folgenden Eigenschaften zu:

- i) $R(D)$ ist metabelsch.
- ii) $(D, \circ)$ ist total-symmetrisch und $(D', \cdot, e) = (D, \cdot, e)$.
- iii) $D' := (D', \circ)$ ist ein echter TS-Normalteiler von $D := (D, \circ)$ derart, daß $R(D/D')$ eine metabelsche Gruppe ist.

Beweis: Die abgeleitete Unterloop $(D', \cdot, e)$ ist ein charakteristischer Normalteiler von $(D, \cdot, e)$ (Hilfssatz 2), also invariant unter den Automorphismen $R_e, R_e^{-1}, L_e, L_e^{-1}$. Wegen BELOUSOV ist $(D', \circ)$ ein total-symmetrischer Normalteiler von $(D, \circ)$ (BELOUSOV, Theorem 9). Weiterhin ist $(D, \circ)/(D', \circ)$ transitiv, also $R(D, \circ)/(D', \circ)$ eine metabelsche Gruppe (vgl. SANDU). Der Rest des Beweises ist nun trivial.

Eine ganz analoge Beweisführung zeigt nun, daß die Behauptung (B1) sowie Satz 11 (hier ging die Kommutativität der distributiven Quasigruppe $(D, \circ)$ nicht ein) auch allgemein für distributive Quasigruppen gültig sind.

4. Bemerkungen zu endlich erzeugten kommutativen distributiven Quasigruppen

Es sei $(D, \circ)$ eine kommutative distributive Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$ und $M(D) = R(D)'$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$.

Kennt man ein endliches Erzeugendensystem für die Loop $(D, \cdot, e)$, so läßt sich mit den zentralen Sätzen von BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 10.1 und Theorem 11.5) die Nilpotenzklasse der Kommutatorgruppe $R(D)'$ von $R(D)$ nach oben abschätzen. Unbefriedigend ist, daß sich dieser Sachverhalt nicht für endliche Erzeugendenzahlen für die Quasigruppe $(D, \circ)$ formulieren läßt. Es ist uns nicht bekannt, in welcher Weise sich ein endliches Erzeugendensystem für $(D, \circ)$ auf die zugehörige kommutative Moufang-Loop überträgt. Für total-symmetrische (kommutative) distributive Quasigruppen gilt das folgende Lemma:

Lemma 10: Es sei $(D, \circ)$ eine distributive TS-Quasigruppe. Ist $M := \{x_i : x_i \in D, 1 \leq i \leq n\}$ ein endliches Erzeugendensystem für $(D, \circ)$, so ist $M \setminus \{x_j\}$, $1 \leq j \leq n$, ein Erzeugendensystem für die zugehörige kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, x_j)$. Insbesondere wird jede zugehörige kommutative Moufang-Loop von $n-1$ Elementen erzeugt.

Beweis: Wir betrachten für ein $j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, die von $M \setminus \{x_j\}$ erzeugte Unterloop $(U, \cdot, x_j)$ der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, x_j)$. Da $(D, \circ)$ total-symmetrisch ist, ist wegen Satz 11, (81) die Unterloop $(U, \cdot, x_j)$ invariant unter dem Automorphismus R_{x_j} . Daher ist $(U, \circ)$ eine distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ (BELOUSOV). Da x_j das Einselement von $(D, \cdot, x_j)$ ist, folgt $x_j \in U$ und insbesondere $M \subseteq U$. Also $(U, \circ) = (D, \circ)$ und $(U, \cdot, x_j) = (D, \cdot, x_j)$.

Es sei für ein beliebiges $e \in D, (D, \cdot, e)$ eine weitere zugehörige kommutative Moufang-Loop. Da $(D, \circ)$ eine Quasigruppe ist, ist die Gleichung: (82) $x_j \circ x = e$, eindeutig in $(D, \circ)$ lösbar. Es sei $x \in D$ die Lösung von (82), dann bildet R_x die Quasigruppe $(D, \circ)$ isomorph auf sich selbst ab. Wegen Satz 2 induziert R_x einen Isomorphismus φ von $(D, \cdot, x_j)$ auf $(D, \cdot, e)$ mit $\varphi(x_j) = e$. Offenbar ist $\varphi(M \setminus \{x_j\})$ ein Erzeugendensystem für $(D, \cdot, e)$.

Mit Lemma 6 ist jede endlich erzeugte distributive TS-Quasigruppe endlich. Mit BRUCK erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 12:

Es sei $(D, \circ)$ eine endliche distributive TS - Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Wird $(D, \circ)$ von $3 \leq n$ (n eine positive ganze Zahl) Elementen erzeugt, so ist $R(D)'$ nilpotent von der Klasse $k \leq 2n-5$.

Beweis:

Wird $(D, \circ)$ von 2 Elementen erzeugt, so ist $(D, \circ)$ die (bis auf Isomorphie) kommutative distributive Quasigruppe der Ordnung 3 und $R(D)'$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 3. Wird $(D, \circ)$ von $n \geq 3$ Elementen erzeugt, so besitzt wegen Lemma 10 für jedes $e \in D$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ ein Erzeugendensystem von $n-1$ Elementen. Aus BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 2.1, Theorem 10.1 und Theorem 11.5) folgt nun direkt Satz 12. ($R(D)' = M(D)$).

Mit dem folgenden Ergebnis lassen sich die Erzeugendenzahlen von $(D, \circ)$ auf die Multiplikationsgruppe der zugehörigen kommutativen Moufang-Loop übertragen.

Satz 13:

Es sei $(D, \circ)$ eine endliche distributive TS-Quasigruppe, $R(D)$ die von den Rechtstranslationen erzeugte Automorphismengruppe von $(D, \circ)$. Weiterhin sei $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop, $M(D) = R(D)'$ die Multiplikationsgruppe der Loop und $(D', \cdot, e)$ die abgeleitete Unterloop von $(D, \cdot, e)$. Es bezeichne $M(D')^*$ den zu $(D', \cdot, e)$ gehörigen Normalteiler in der Gruppe $M(D)$. Dann gilt:

$$M(D')^* = M(D)' = \phi(M(D)) \quad ,$$

wobei $\phi(M(D))$ die Frattini-Gruppe der endlichen Gruppe $M(D)$ ist.

Beweis:

Es seien die Voraussetzungen von Satz 13 gegeben. Da $(D, \circ)$ endlich ist, ist die zugehörige Loop $(D, \cdot, e)$ endlich und die Gruppe $M(D)$ ist nilpotent. Weiterhin ist $(D, \circ)$ total-symmetrisch, also ist $(D, \cdot, e)$ eine endliche kommutative

Moufang-Loop vom Exponenten 3 (Satz 1, i)). Wegen BRUCK ([2], Kap. I, Theorem 8C) ist daher die Multiplikationsgruppe $M(D)$ eine 3-Gruppe und wird von endlich vielen Multiplikationen der Ordnung 3 erzeugt, d.h. $M(D)$ ist endlich. Wegen Hilfssatz 7 gilt: $M(D')^* = M(D)'$. Nach BRUCK ([2], Kap. I, Theorem 3B) besitzt jedes Element $\alpha \in M(D)$ eine eindeutige Darstellung

$$(82) \quad \alpha = \theta \cdot m_x, \quad \theta \in \mathbb{I}, x \in D,$$

wobei $\mathbb{I}$ die Gruppe der inneren Abbildungen in $M(D)$ ist. Da $(D, \cdot, e)$ eine Loop vom Exponenten 3 ist, folgt mit Lemma 5 für alle $x \in D$: $(83) \quad m_x^3 = 1$, 1 das Einselement in $M(D)$. Des weiteren gilt wegen Hilfssatz 8: $(84) \quad \mathbb{I} \leq M(D)'$. Aus (82), (83) und (84) folgt nun $(85) \quad \forall \alpha \in M(D): \alpha^3 \in M(D)'$. Mit (85) ist aber Satz 13 gezeigt, denn $M(D)$ ist eine endliche 3-Gruppe und somit gilt für die Frattini-Gruppe $\Phi(M(D))$:

$$\Phi(M(D)) = M(D)'M(D)^3,$$

$M(D)^3 := \langle \{\alpha^3: \alpha \in M(D)\} \rangle$ (vgl. HUPPERT, Kap. III, Satz 3.14).

Bemerkung: Der letzte Schritt des Beweises von Satz 13 läßt sich auch ohne das zitierte gruppentheoretische Ergebnis führen, wenn man beachtet, daß $M(D)/M(D')^* \cong (D, \cdot, e)/(D', \cdot, e) =: G$ und G ist eine elementar-Abelsche Gruppe.

Satz 14:

Es sei $(D, \circ)$ eine endliche distributive TS-Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop und $M(D)$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Dann gilt:
Die von $n \geq 2$ (n eine positive ganze Zahl) Multiplikationen erzeugte Untergruppe von $M(D)$ ist nilpotent von der Klasse $k \leq 2(n-1)$.

Beweis:

Es seien die Voraussetzungen von Satz 14 gegeben. Weiterhin sei $G := \langle \{m_{x_i} : x_i \in D \text{ und } 1 \leq i \leq n, n \geq 2\} \rangle$, die von den Multiplikationen m_{x_i} erzeugte Untergruppe von $M(D)$. Wir betrachten die von den Elementen $x_1, \dots, x_n$ erzeugte Unter-

loop $(U, \cdot, e)$ von $(D, \cdot, e)$. Es sei $M(U) := \langle \{m_u : u \in U\} \rangle$, die von den Multiplikationen mit Elementen aus U erzeugte Untergruppe von $M(D)$. Es gilt: $G \leq M(U)$. Da $(D, \circ)$ total-symmetrisch ist, ist $(U, \circ)$ eine distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$ (vgl. Beweis von Satz 11). Mit Lemma 4 folgt nun:

$$(86) \quad \text{Mult}((U, \cdot, e)) \cong M(U)/N,$$

wobei $\text{Mult}((U, \cdot, e))$ die Multiplikationsgruppe der Unterloop $(U, \cdot, e)$ ist und $N \leq Z(M(U))$.

1. Da $(U, \cdot, e)$ von $n \geq 2$ Elementen erzeugt wird, folgt mit BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 2.1 und Theorem 10.1):
Die Loop $(U, \cdot, e)$ ist zentral-nilpotent von der Klasse $k \leq n-1$.
2. Aus 1. folgt mit BRUCK ([3], Kap. VIII, Theorem 11.5):
Die Gruppe $\text{Mult}((U, \cdot, e))$ ist nilpotent von der Klasse $r \leq 2(n-1)-1$.
3. Da $M(D)$ eine endliche 3-Gruppe ist (vgl. Beweis von Satz 13), ist $M(U)$ nilpotent. Mit 2. und (86) folgt:
 $M(U)$ ist nilpotent von der Klasse $k \leq (2(n-1)-1)+1 = 2(n-1)$.

Da $G \leq M(U)$, ist Satz 14 gezeigt.

Bemerkungen:

i) Wegen Satz 2 ist die Aussage von Satz 14 für alle endlichen kommutativen Moufang-Loops vom Exponenten 3 gültig.

ii) Ist $(D, \circ)$ eine endliche TS-Quasigruppe und $(U, \circ)$ eine von $n \geq 3$ Elementen erzeugte Unterquasigruppe von $(D, \circ)$, so liefert der Beweis von Satz 14 wegen Lemma 4 eine Abschätzung der Nilpotenzklasse von $\langle U^D \rangle'$, der Kommutatorgruppe der von den Rechtstranslationen mit Elementen von U erzeugten Untergruppe $\langle U^D \rangle$ von $R(D)$.

Es sei nun $(D, \circ)$ eine endliche TS-Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop vom Exponenten 3 und $M(D)$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Wir betrachten die von 3 Multiplikationen erzeugte Untergruppe von $M(D)$ näher.

Lemma 11: Es sei G die von 3 Multiplikationen m_x, m_y, m_z , $x, y, z \in D$, erzeugte Untergruppe von $M(D)$. Dann gilt:

- i) G ist eine endliche 3-Gruppe und nilpotent von der Klasse $k \leq 4$.
- ii) Ist G nilpotent von der Klasse $k = 4$, so existiert ein nicht-trivialer Normalteiler N in G mit $N \leq Z(G)$ und G/N ist eine Gruppe vom Exponenten 3.
- iii) Jedes $\alpha \in N$ läßt die von den 3 Elementen x, y, z erzeugte Unterloop von $(D, \cdot, e)$ elementweise fest.
- iv) Die Abbildung $\alpha \mapsto \alpha^3$ bildet jedes Element $\alpha \in G$ in das Zentrum der Gruppe G ab.

Beweis:

i): Nach Voraussetzung ist $(D, \circ)$ eine distributive, endliche TS-Quasigruppe. Wie wir im Beweis von Satz 13 gezeigt haben, ist somit $M(D)$ eine endliche 3-Gruppe. Also ist G eine endliche 3-Gruppe und der Rest der Behauptung i) folgt mit Satz 14.

ii): Wir betrachten die von den Elementen $x, y, z \in D$ erzeugte Unterloop $(H, \cdot, e)$ von $(D, \cdot, e)$. Da $(D, \circ)$ total-symmetrisch ist, folgt mit (81): $(H, \circ)$ ist eine distributive Unterquasigruppe von $(D, \circ)$. Ist $\langle H^D \rangle$ die von den Rechtstranslationen mit Elementen aus H erzeugte Untergruppe von $R(D)$, der von den Rechtstranslationen erzeugten Automorphismengruppe von $(D, \circ)$, so folgt mit Lemma 4, ii):

$$(86) \quad \text{Mult}((H, \cdot, e)) \cong \langle H^D \rangle' / N,$$

wobei $\text{Mult}((H, \cdot, e))$ die Multiplikationsgruppe der Loop $(H, \cdot, e)$ ist und $N := \langle H^D \rangle' \cap Z(\langle H^D \rangle)$. Weiterhin gilt mit Lemma 4: $\langle H^D \rangle' = M(H) := \langle \{m_x : x \in H\} \rangle$. Da die Loop $(H, \cdot, e)$ von 3 Elementen erzeugt wird, ist $(H, \cdot, e)$ zentral-nilpotent von der Klasse $k \leq 2$, also $\text{Mult}((H, \cdot, e))$ nilpotent von der Klasse $r \leq 3$ (BRUCK, [3], Kap. VIII, Theorem 2.1 und Theorem 11.5). Nun ist $(H, \cdot, e)$ eine Loop vom Exponenten 3, also $\text{Mult}((H, \cdot, e))$ eine Gruppe vom Exponenten 3 (vgl. Abschnitt 3.2). Offenbar gilt: $G \leq M(H)$. Da $(D, \cdot, e)$ eine Loop vom Exponenten 3

ist, gilt für alle $x \in D$: $m_x^{-1} = m_x^2$. Nun wird die Loop $(H, \cdot, e)$ von den Elementen $x, y, z \in D$ erzeugt. Wegen Lemma 5 läßt sich daher jedes $\alpha \in M(H)$ als endliches Produkt von Multiplikationen darstellen, in dem lediglich die Multiplikationen m_x, m_y, m_z als Faktoren auftreten. Somit folgt: $M(H) \leq G$.

Ist G nilpotent von der Klasse $k = 4$, so kann wegen (86) und da $\text{Mult}((H, \cdot, e))$ eine Gruppe vom Exponenten 3 ist, die Gruppe N nicht trivial sein.

iii): Da $N \leq Z(\langle H^D \rangle)$, zentralisiert jedes $\alpha \in N$ die Rechts-translationen mit Elementen der distributiven Unterquasigruppe $(H, \circ)$ von $(D, \circ)$. Wegen Hilfssatz 1, iv) läßt somit jedes $\alpha \in N$ die Quasigruppe $(H, \circ)$ elementweise fest. Damit läßt jedes $\alpha \in N$ auch die Unterloop $(H, \cdot, e)$ elementweise fest.

iv): Das folgt unmittelbar aus ii).

Es sei $(D, \cdot, e)$ eine kommutative Moufang-Loop. Für eine positive ganze Zahl n sei $c(n)$ diejenige kleinste ganze Zahl k , für die gilt: $2k > n$. BRUCK hat in [4] folgendes gezeigt: Gilt in einer von $n \geq 3$ Elementen erzeugten kommutativen Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ für alle $x, y, z, a, b \in D$ die Beziehung:

$$(87) \quad (((x, y, a), a, b), b, z) = e,$$

so ist $(D, \cdot, e)$ zentral-nilpotent von der Klasse $k \leq c(n)$. Die Frage, ob alle endlich erzeugten kommutativen Moufang-Loops die Beziehung (87) erfüllen, ist unseres Wissens bis heute ungeklärt. Man erkennt aus (87), daß es zur Klärung dieser Frage genügt, von 5 Elementen erzeugte kommutative Moufang-Loops zu betrachten. Wir haben in diesem Abschnitt endliche kommutative Moufang-Loops vom Exponenten 3 untersucht. Diesen Loops kann mit Satz 2 in eindeutiger Weise eine distributive TS-Quasigruppe zugeordnet werden. Man kann daher auch fragen:

Gibt es eine endliche distributive TS-Quasigruppe, deren zugehörige kommutative Moufang-Loop die Beziehung (87) nicht erfüllt?

Wir konnten diese Frage nicht klären. Der folgende Satz

zeigt jedoch auf, daß man zur Klärung des Problems die Ergebnisse von Satz 14 und von Lemma 10 heranziehen kann.

Satz 15:

Es sei $(D, \circ)$ eine endliche distributive TS-Quasigruppe, $(D, \cdot, e)$ die zugehörige kommutative Moufang-Loop vom Exponenten 3 und $M(D)$ die Multiplikationsgruppe von $(D, \cdot, e)$. Erfüllt $M(D)$ die Bedingung:

(*) Je drei Multiplikationen aus $M(D)$ erzeugen eine von der Klasse $k \leq 3$ nilpotente Untergruppe von $M(D)$;
dann erfüllt die Loop $(D, \cdot, e)$ die Beziehung (87).

Beweis:

$M(D)$ erfülle die Bedingung (*) von Satz 15.

Es sei G die von den drei Multiplikationen m_x, m_y, m_z , $x, y, z \in D$, erzeugte Untergruppe von $M(D)$. Wir betrachten den Assoziator $(x, y, z) \in D$. Da $(D, \cdot, e)$ eine Loop vom Exponenten 3 ist, folgt mit Lemma 8, v):

$$(88) \quad m_{(x,y,z)} = m_x^{-1} [m_x, m(y,z)] m_x,$$

wobei $m(y,z)$ gemäß Definition 10, (37) festgelegt ist. Da G nilpotent von der Klasse $k \leq 3$ ist, liegt mit Lemma 8 das Element $\alpha := [m_x, m(y,z)]$ in $K_3(G) \subseteq Z(G)$, $K_i(G)$ bezeichne in üblicher Weise die absteigende Kommutatorkette von G . Daher folgt mit (88) die Beziehung:

$$(89) \quad m_{(x,y,z)} = [m_x, m(y,z)].$$

Die Beziehung (89) gilt nach Voraussetzung für alle $x, y, z \in D$, insbesondere auch für Elemente $(x, y, a), a, b \in D$ und $((x, y, a), a, b), b, z \in D$. Nach den Rechenregeln für Assoziatoren in kommutativen Moufang-Loops (BRUCK, [2]) erhält man für alle $a, b, x, y, z \in D$:

$$(90) \quad c := (((x, y, a), a, b), b, z) = (b, z, ((x, y, a), a, b)) = (z, ((x, y, a), a, b), b),$$

und mit (89) folgt

$$(91) \quad m_c = [m_z, m(((x, y, a), a, b), b)].$$

Mit (89) folgt nun: $m((x,y,a),a,b),b) = 1,1$ die Eins in $M(D)$ und daher $m_c = 1$, also $((x,y,a),a,b),b,z) = e$ für alle $a,b,x,y,z \in D$.

Bemerkungen:

i) Gilt die Bedingung (*) für beliebige Elemente $\alpha, \beta, \gamma \in M(D)$, so ist mit einem Ergebnis von HEINECKEN (vgl. HUPPERT, Kap. III, Satz 6.10) die Gruppe $M(D)$ selbst nilpotent von der Klasse $k \leq 3$ und (87) trivialerweise erfüllt.

ii) Selbstverständlich kann man analog zum Beweis von Satz 15 auch mit einer von 4 Multiplikationen erzeugten Untergruppe U von $M(D)$ argumentieren. Hier ist vorauszusetzen, daß U nilpotent von der Klasse $k \leq 5$ ist. Man kann mit Hilfe von Satz 14 zeigen, daß eine endliche kommutative Moufang-Loop $(D, \cdot, e)$ vom Exponenten 3 dann und nur dann die Beziehung (87) erfüllt, wenn für alle $x, y, a, b \in D$ die Multiplikation $m((x,y,a),a,b)$ im Zentrum der von den 4 Multiplikationen m_x, m_y, m_a, m_b erzeugten Untergruppe von $M(D)$ liegt. Diese und weitere Überlegungen im Zusammenhang mit der Fragestellung von Satz 15 sollen ggf. in einer späteren Arbeit aufgegriffen werden.

Literatur

A.ALBERT: Quasigroups I, Trans.Amer.Math.Soc. 54 (1943), S.507-529.

W.D.BELOUSOV: O strukture distributivnih kvasigrupp, Mat. Sbornik 50 (1960), S.267-298.

G.BOL: Gewebe und Gruppen, Math.Ann. 114 (1937), S.414-431.

R.H.BRUCK:

[1] :Some results in the theory of quasigroups, Trans.Amer. Math.Soc. 55 (1944), S.19-52.

[2] :Contributions to the theory of loops, Trans.Amer.Math. Soc. 60 (1946), S.245-354.

[3] :A survey of binary systems, 3 rd.ed., Springer 1971.

[4] :An open question concerning Moufang-Loops, Arch.Math. 10 (1959), S.419-421.

C.BURSTIN/W.MAYER: Distributive Gruppen endlicher Ordnung, J. reine angew. Math. 160 (1929), S.111-130.

O.CHEIN:

[1] :Moufang-Loops of small order I, Mem. of the AMS 188: (1974), S.31-51.

[2] :Moufang-Loops of small order II, Mem. of the AMS 13/1/197 (1978).

B.FISCHER: Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung, Math.Z. 83 (1964), S.267-303.

G.GLAUBERMANN:

[1] :On loops of odd order, J. Algebra 1 (1964), S.374-396.

[2] :On loops of odd order II, J. Algebra 8 (1968), S.393-414.

B.HUPPERT: Endliche Gruppen I, Springer 1967.

YU.I.MANIN: Cubic forms, North-Holland 1974.

N.I.SANDU: Obobscchtschenie teoremi Fischera dla distributivnih kvasigrupp, Mat.Sametki 23 (1978), S.521-526.

J.D.H.SMITH: Finite distributive quasigroups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976), S.37-41.

K.STRAMBACH: Kommutative distributive Quasigruppen, Math.-Phys. Sem. Ber. XXIV/1977/1, S.71-83.

LEBENS LAUF

Am 4. Januar 1948 wurde ich, Viktor Vogt, als Sohn des Elektromonteurs Emil Vogt und der Hausfrau Gertrud Vogt, geborene Troßmann, in Ansbach geboren. Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule in Ansbach, 1958 erfolgte der Übertritt in das Platengymnasium in Ansbach. Dort legte ich 1968 die Reifeprüfung ab. Im Herbst 1968 wurde ich zur Bundeswehr eingezogen. Nach zweijähriger Dienstzeit begann ich im Wintersemester 1970/71 das Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. Im Frühjahr 1973 absolvierte ich dort die Zwischenprüfung, im Herbst 1976 die Staatsprüfung für das Lehramt an den Gymnasien in Bayern in den Fächern Mathematik und Physik. In der Zeit von 1975 bis März 1977 war ich am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg als Hilfskraft tätig. Seit März 1977 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte wissenschaftlicher Assistenten am Lehrstuhl Didaktik der Mathematik in Nürnberg beschäftigt. Seit 1977 arbeite ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. Strambach, Mathematisches Institut Erlangen, im Bereich der nicht-assoziativen Algebra.

